


Stanford University Libraries
3 6105 000 993 746



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Siebenundsiebzigster Band.

In vier Heften.

Mit drei Figurentafeln.

Berlin, 1874.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des siebenundsiebzigsten Bandes.

Druckfehlerverzeichniss.

Seite 1, Zeile 18 v. u. statt 0,0318 lese man 0,40318.

„ 8, Gleichung 1 von (15.) fehlt vor 3—2n eine Klammer (.

„ 19, „ (51.) statt $\int_0^\infty R_n K_n dr$ lese man $\int_0^\infty R_n R_n dr$.

„ 26, „ (66.) „ $2\lambda^2 R_2(\alpha)$ „ „ $\varepsilon\lambda^2 R_2(\alpha)$.

„ 28, Zeile 7 v. o. „ $2\lambda^2 f_{s-1}(\lambda^2)$ „ „ $\varepsilon\lambda^2 f_{s-1}(\lambda^2)$.

„ 32, „ 16 v. o. „ $D'(\lambda=\alpha-i\beta)$ „ „ $D'(\lambda'=\alpha-i\beta)$.

„ 224, „ 17 v. o. „ $q_{\varrho\sigma}$ „ „ $q_{\sigma\varrho}$.

Ueber den Einfluss, welchen auf die Bewegung eines Pendels mit einem kugelförmigen Hohlraume eine in ihm enthaltene reibende Flüssigkeit ausübt.

(Von Herrn *G. Lübeck* in Carlsruhe.)

In seinen Versuchen über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht*), liess *Bessel* einen als Pendelkörper aufgehängten Hohlcylinder von Messing schwingen, welcher die verschiedenen zu prüfenden Körper in sich aufgenommen hatte. Die Beobachtung gab das Resultat, dass die Anziehung der Erde allen dem Versuche unterworfenen festen Körpern dieselbe Beschleunigung ertheile; die auf Grund dieser Beobachtungen angestellte Berechnung des einfachen Secundenpendels für Königsberg ergab Werthe, welche von 440,8154 pariser Linien nur innerhalb der durch die Beobachtung gesteckten Fehlergrenzen abwichen.

Als jedoch der Hohlcylinder mit Wasser gefüllt war, wurde aus seinen Schwingungen eine um 0,0318 grössere Länge des einfachen Secundenpendels hergeleitet, wobei zu bemerken, dass das Trägheitsmoment des Pendels auf dieselbe Weise berechnet war, als wäre ein gleichmassiger fester Körper statt der Flüssigkeit im Cylinder enthalten. Dass hieraus nicht zu schliessen sei, dass die Erdanziehung dem Wasser eine grössere Beschleunigung als den festen Körpern ertheile, geht aus den Beobachtungen hervor, welche *Bessel* mit demselben wassergefüllten Cylinder an einem um eine Toise längeren Pendel anstellte. Die daraus berechnete Länge des einfachen Secundenpendels stimmte mit der aus den Versuchen mit den festen Körpern hergeleiteten überein.

Der Grund der Abweichung bei dem kürzeren Pendel wird, wie *Bessel* bemerkt, darin zu suchen sein, dass die eingeschlossene Flüssigkeit durch die Bewegung des Pendels zu eigenen Schwingungen veranlasst wird, wo-

---

*) Abhandlungen der Berliner Academie von 1830.

durch ihr Trägheitsmoment in Bezug auf die Schneide des Pendels verschieden wird von dem eines gleichmassigen festen Körpers.

Die Ursache der in der Flüssigkeit hervorgerufenen Eigenbewegung sieht *Bessel* in der Centrifugalkraft, welche in den oberen Schichten des Cylinders grösser sei als in den unteren. Auch sei die Wirkung der Centrifugalkraft auf die Flüssigkeit bei einem kürzeren Pendel grösser, als bei einem längeren, weshalb sich die Abweichung nur bei dem kürzeren gezeigt habe.

Mir scheint einerseits die Centrifugalkraft der oberen Schichten kleiner zu sein als die der unteren, weil alle Theile des Pendels dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzen, so dass nicht einzusehen, auf welche Weise diese Verschiedenheit der Centrifugalkraft zu einer eigenen Bewegung der Flüssigkeit Anlass geben könnte. Andererseits ist jene Kraft durch das Product aus Linear- und Winkelgeschwindigkeit gegeben, also, wenn letztere, wie es in der Rechnung geschieht, als unendlich klein angenommen werden, eine Grösse höherer Ordnung, welche die Bewegung des Pendels nicht merklich stören könnte.

Eine Erklärung für die abweichende Bewegung des kürzeren Pendels hat sich jedenfalls auf den wesentlichen Unterschied zwischen einer Flüssigkeit und einem festen Körper, die leichtere Verschiebbarkeit ihrer Theilchen zu beziehen. Die relative Bewegung zweier benachbarter Theilchen wird abhängen von der Grösse der auf sie wirkenden Kräfte und dem Widerstande, welchen sie ihrer Verschiebung entgegensetzen. Zur Berechnung der Bewegung in einer Flüssigkeit ist also die Kenntniss der Kraft nöthig, welche zwei Flüssigkeitsschichten an einander verschiebt. Darüber giebt die Theorie der Reibung der Flüssigkeiten Auskunft. Demnach wäre es angezeigt, dieselbe auf den vorliegenden Fall des als Pendelkörper schwingenden wassergefüllten Cylinders anzuwenden. Durch die cylindrische Begrenzung der schwingenden Wassermasse wird jedoch die Berechnung der Bewegungen in ihrem Innern äusserst erschwert, so dass ich es vorgezogen habe, gemäss einer mir von Herrn Prof. *O. E. Meyer* vorgeschlagenen Aufgabe, das Problem für den Fall einer die Flüssigkeit enthaltenden Hohlkugel zu behandeln. Die so gewählte Umgrenzung der Flüssigkeit bietet Symmetrieverhältnisse, welche vereinfachende Annahmen gestatten.

Die Lösung dieses Problemes bietet die mathematischen Hilfsmittel, um durch Pendelbeobachtungen die Grösse der inneren Reibung verschiedener Flüssigkeiten zu messen. Ausserdem werden wir durch die Rechnung zu Resultaten geführt, welche die *Bessel*schen Versuche auch für den schwingenden Hohlcylinder zu bestätigen scheinen.

§. 1. Die Bewegung in der Flüssigkeit wird bestimmt durch Uebereinanderlagerung von zwei Bewegungszuständen.

Mit Berücksichtigung der inneren Reibung sind für unendlich kleine Bewegungen der Theilchen einer incompressiblen Flüssigkeit die Differentialgleichungen hergeleitet:*)

$$(1.)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial u}{\partial t} = \eta \triangle u - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \varrho X, \\ \varrho \dfrac{\partial v}{\partial t} = \eta \triangle v - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \varrho Y, \\ \varrho \dfrac{\partial w}{\partial t} = \eta \triangle w - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \varrho Z. \end{cases}$$

Hierin bedeuten: $\triangle$ das Symbol

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit des Theilchens x, y, z nach den drei Axen; X, Y, Z die Componenten der äusseren Kräfte; p den inneren Druck; t die Zeit; ϱ die Dichtigkeit; η den Coefficienten der inneren Reibung; derselbe ist seinen Dimensionen nach das Quadrat einer Linie, dividirt durch eine Zeit (die Zeiteinheit).**)

In Verbindung mit der Continuitätsgleichung

$$(2.)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

reichen die Gleichungen (1.) zur Bestimmung von u, v, w und p aus.

In Bezug auf die Richtung des Coordinatensystems setzen wir fest,

*) Die Angabe der Autoren findet man in: *O. E. Meyer*, Bewegung eines Pendels in einem reibenden Medium, *Borchardts* Journal Bd. 73; Ueber die Reibung der Gase, *Poggd.*. Ann. CXXV. p. 188.

**) *Stokes*, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. Cambr. Trans. IX. Auszug in Fortschritte der Physik für 1850--51 p. 99.

dass die X-Axe die Pendelbahn des Hohlkugelcentrums im tiefsten Punkte, dem Coordinaten-Anfangspunkt, berühre, die Z-Axe auf dieser in der Pendelebene, der Richtung der Schwere entgegengesetzt, senkrecht stehe; schliesslich sei die Y-Axe senkrecht zur Pendelebene.

Dadurch, dass wir als einzig vorhandene äussere Kraft die Schwere annehmen, wird

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -g.$$

Setzen wir

$$(3.)\quad p = \varrho g\,(a - z) + \mathfrak{p},$$

wo a den Radius der inneren Grenzfläche der Hohlkugel bedeutet, so werden die Gleichungen (1.)

$$(4.)\quad \begin{cases} \varrho\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \eta\,\triangle\,u - \dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x}, \\ \varrho\,\dfrac{\partial v}{\partial t} = \eta\,\triangle\,v - \dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y}, \\ \varrho\,\dfrac{\partial w}{\partial t} = \eta\,\triangle\,w - \dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z} \end{cases}$$

In irgend einem Momente der unendlich kleinen Pendelschwingung wird der Ort in der Hohlkugel, welcher zur Zeit ihrer Ruhelage durch die Coordinaten x, y, z bestimmt war, andere unendlich wenig verschiedene Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ haben. Seine Geschwindigkeitscomponenten werden nicht die des Punktes x, y, z, sondern $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ sein. Da aber diese unendlich kleinen Componenten als stetige Functionen der Coordinaten vorausgesetzt werden können, sind du, dv, dw Grössen zweiter Ordnung. Letztere vernachlässigend, geben wir jenem Orte die constanten Coordinaten x, y, z.

Die Bewegung der Hohlkugel kann als eine zweifache aufgefasst werden, nämlich als eine in einer Kreisbahn ohne Drehung fortschreitende, verbunden mit einer Oscillation um den zur Pendelebene senkrechten Durchmesser. Sei die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Kugel U, die Winkelgeschwindigkeit ihrer Oscillation Ξ, so ist Ξ auch die Grösse der Winkelgeschwindigkeit des Pendels, und man hat $U = L.\Xi$, wenn L die Entfernung des Kugelcentrums von der Schneide ist. Beide Geschwindigkeiten sind von derselben Ordnung, wenn L, wie wir annehmen, weder sehr gross, noch sehr klein ist.

Die fortschreitende Bewegung des Kugelmittelpunkts dürfen wir bei unserer Voraussetzung unendlich kleiner Schwingungen als gradlinig in Richtung der X-Axe annehmen, weil während der Schwingungen seine Erhebungen über dieselbe stets Grössen höherer Ordnung bleiben, welche die Componenten u, v, w nicht merklich beeinflussen können.

Die gradlinig fortschreitende Bewegung würde, allein vorhanden, jedem Theilchen eine Geschwindigkeit geben, deren Richtung in der durch dasselbe und die X-Axe gelegten Ebene läge. Auf der Peripherie eines zur X-Axe senkrechten Kreises, dessen Mittelpunkt in der Axe, würde diese Geschwindigkeit überall dieselbe Grösse und gleiche Neigung gegen die X-Axe haben.

Die Oscillation der Hohlkugel um die Y-Axe würde, wäre sie allein vorhanden, jedes Theilchen zu einer Bewegung längs der Peripherie eines um einen Punkt der Y-Axe beschriebenen, der XZ-Ebene parallelen Kreises veranlassen, der Art, dass alle auf ihm befindlichen Theilchen zu gleicher Zeit gleiche Geschwindigkeit hätten.

Aus diesen beiden Bewegungszuständen dürfen wir durch Uebereinanderlagerung die Bewegung in der Flüssigkeit zusammensetzen, welche die Pendelschwingung hervorruft. Gedachte Methode, welche die Gleichungen (4.) wegen des linearen Vorkommens von u, v, w und $\mathfrak{p}$ gestatten, erleichtert die Berechnung dieser Functionen, welche mit grossen Schwierigkeiten verknüpft wäre, wollte man sie wie in einem Gusse herstellen.

Demnach haben wir folgende zwei Aufgaben zu behandeln: Zu bestimmen die Bewegung der Flüssigkeit in einer Hohlkugel, welche mit unendlich kleiner Geschwindigkeit

1. ohne Drehung gradlinig hin- und herpendelt,*)
2. um einen festen horizontalen Durchmesser oscillirt.**)

---

*) Diese Aufgabe hängt eng zusammen mit der bereits erwähnten Abhandlung von *O. E. Meyer*, *Borchardts* J. Bd. 73. Aus derselben ist die Differentialgleichung (7.) entlehnt. Die Functionen des Radius r und des Winkels ϑ sind jedoch in anderen Formen, welche in Rücksicht auf die Constantenbestimmung des vorliegenden Problems Vortheile bieten, gewählt worden.

**) Der Einfluss einer in eine Hohlkugel eingeschlossenen Flüssigkeit auf die oscillirende Bewegung derselben, ist von den Herren *Helmholtz* und *v. Piotrowski* theoretisch und experimentell behandelt. (Wien. Ber. XL.) Ich habe aber vorgezogen, die Bewegung in der Flüssigkeit durch Functionen zu bestimmen, die mit denen der ersten Aufgabe

§. 2. Integration der Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit in der Hohlkugel, wenn diese ohne Drehung gradlinig hin- und herpendelt.

Die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens vom Kugelmittelpunkt sei r, der Winkel zwischen dieser und der positiven X-Axe ϑ, φ sei derjenige zwischen der Projection von r auf die YZ-Ebene und der Y-Axe.

Alsdann ist

$$(5.)\quad x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Bezeichnen wir mit q die Geschwindigkeitscomponente eines Theilchens in Richtung der Projection von r auf die YZ-Ebene, so sind nach den in §. 1 gemachten Bemerkungen über die Symmetrieverhältnisse in der Flüssigkeitsbewegung, wenn die Hohlkugel sich ohne Drehung gradlinig bewegt, u und q die einzig vorhandenen, von φ unabhängigen Componenten der Geschwindigkeit. Die Gleichung (2.) liefert den Zusammenhang von u und q, nämlich

$$(6.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\dfrac{\cos\vartheta}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \sin\vartheta\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right\}, \\ q = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\dfrac{\sin\vartheta}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta} - \cos\vartheta\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right\}. \end{cases}$$

Für die Function ψ findet man nach Elimination von $\mathfrak{p}$ aus der ersten und zweiten (oder dritten) Gleichung (4.) die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(7.)\quad \triangle\left(\triangle\psi - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$

worin $\gamma^2 = \frac{\eta}{\varrho}$ der sogenannte Reibungsindex und

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - \frac{ctg\,\vartheta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}.$$

---

möglichst zusammenfallen, als die der *Helmholtz*schen Abhandlung zu gebrauchen. — In der Abhandlung: „Ueber die Bewegung einer Kugel, welche in einer reibenden Flüssigkeit um einen senkrechten Durchmesser als feststehende Axe rotirend schwingt," Programm des städt. Gymn. zu Danzig 1866, giebt Herr *Lampe* die in §. 4. enthaltene Differentialgleichung (39.), deren Lösung mit anderen Functionen als den hier gewählten ausgeführt ist.

Nach der von Herrn *O. E. Meyer**) angewandten Methode ergiebt sich als allgemeines Integral dieser Gleichung

$$(8.)\quad \begin{cases} \psi = \psi_1 + \psi_2, \\ \psi_1 = \Sigma (A\,\Theta_{1,n} + F\Theta_{2,n})\left(r^{n+1} + \frac{H}{r^n}\right) e^{-\lambda^2\gamma^2 t}, \\ \psi_2 = \Sigma (B\,\Theta_{1,n} + G\,\Theta_{2,n})(R_{1,n} + K.\,R_{2,n})\, e^{-\lambda^2\gamma^2 t} \end{cases}$$

Hierin sind r^{n+1} und $\frac{1}{r^n}$ Lösungen der Differentialgleichung

$$(9.)\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial r^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\mathfrak{R} = 0;$$

während

$$(10.)\quad \begin{cases} \Theta_{1,n} = \cos^{n+1}\vartheta + \frac{(n+1)n}{2(1-2n)}\cos^{n-1}\vartheta + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4(1-2n)(3-2n)}\cos^{n-3}\vartheta \\ \quad + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(1-2n)(3-2n)(5-2n)}\cos^{n-5}\vartheta + \cdots, \\ \Theta_{2,n} = \cos^{-n}\vartheta + \frac{n(n+1)}{2(2n+3)}\cos^{-(n+2)}\vartheta + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\cos^{-(n+4)}\vartheta \\ \quad + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2\cdot 4\cdot 6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\cos^{-(n+6)}\vartheta + \cdots \end{cases}$$

der Gleichung

$$(11.)\quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right) = -\frac{n(n+1)}{\sin\vartheta}\Theta$$

genügen. Endlich sind

$$(12.)\quad \begin{cases} R_{1,n} = r^{n+1}\Big\{1 - \frac{\lambda^2 r^2}{2(2n+3)} + \frac{\lambda^4 r^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} \\ \quad - \frac{\lambda^6 r^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+3)(2n+5)(2n+7)} + \cdots\Big\}, \\ R_{2,n} = \frac{1}{r^n}\Big\{1 - \frac{\lambda^2 r^2}{2(1-2n)} + \frac{\lambda^4 r^4}{2\cdot 4(1-2n)(3-2n)} \\ \quad - \frac{\lambda^6 r^6}{2\cdot 4\cdot 6(1-2n)(3-2n)(5-2n)} + \cdots\Big\} \end{cases}$$

die beiden Intergrale von

$$(13.)\quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}R + \lambda^2 R = 0.$$

A, *F*, *H*, *B*, *G*, *K*, sowie n und λ sind durch die Bedingungen des Problems

*) *Borchardts* Journal, Bd. 73, a. a. O.

zu bestimmende Constanten, die Summenzeichen erstrecken sich über alle zulässigen Werthe von n und λ.

Zur Kenntnis der für n zulässigen Werthe gelangen wir wie folgt:

Aus (6.) folgt, dass für $\vartheta = 0, \pi$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = 0$$

sein müssen, wenn u und q für jene Werthe von ϑ nicht unendlich gross werden sollen. Die zweite dieser Gleichungen wird wegen des in $\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$ steckenden Factors $\sin\vartheta$ von selbst erfüllt. Damit auch die erste Gleichung für jeden Werth von r befriedigt werde, müssen für $\vartheta = 0, \pi$ die Gleichungen

$$(14.)\qquad A\Theta_{1,n} + F\Theta_{2,n} = 0,\ B\Theta_{1,n} + G\Theta_{2,n} = 0$$

bestehen. Nun ist

$$(15.)\quad \begin{cases} \Theta_{1,n}(0) = 1 + \frac{(n+1)n}{2(1-2n)} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4(1-2n)\cdot 3-2n)} + \cdots \\ \qquad = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\cdots}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(1-2n)(3-2n)(5-2n)\cdots}, \\ \Theta_{2,n}(0) = 1 + \frac{n(n+1)}{2(2n+3)} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \cdots \\ \qquad = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)\cdots}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+3)(2n+5)(2n+7)\cdots}, \\ \Theta_{1,n}(\pi) = (-1)^{n+1}\Theta_{1,n}(0),\quad \Theta_{2,n}(\pi) = (-1)^n\Theta_{2,n}(0); \end{cases}$$

also müssen die Gleichungen

$$A\Theta_{1,n}(0) \pm F\Theta_{2,n}(0) = 0,$$
$$B\Theta_{1,n}(0) \pm G\Theta_{2,n}(0) = 0$$

oder

$$A\Theta_{1,n}(0) = B\Theta_{1,n}(0) = F\Theta_{2,n}(0) = G\Theta_{2,n}(0) = 0$$

erfüllt sein. — Nach (15.) verschwindet $\Theta_{1,n}(0)$ nur dann, wenn n eine der Zahlen $1, 2, 3, 4\cdots$, dagegen $\Theta_{2,n}(0)$ nur, wenn $n = -2, -3, -4\cdots$ Für andere Werthe von n verschwindet weder $\Theta_{1,n}(0)$ noch $\Theta_{2,n}(0)$, so dass für solche n $A = B = F = G = 0$ zu setzen; d. h. für n sind als Werthe nur die ganzen Zahlen (von $-\infty$ bis $+\infty$) statthaft, mit Ausschluss von 0 und -1.

Wenn $n = 1, 2, 3\cdots$, muss $F = G = 0$ gesetzt werden; wenn $n = -2, -3, -4\cdots$, $A = B = 0$.

Auf Grund vorstehender Ermittlungen setzen wir an Stelle der beiden letzten Gleichungen (8.)

$$(16.)\quad \begin{cases} \psi_1 = \sum\limits_{n=1,2,3,4\ldots} A\,\Theta_{1,n}\left(r^{n+1}+\frac{H^{\rm I}}{r^n}\right)e^{-\lambda^2\gamma^2 t} + \sum\limits_{n=-2,-3,-4\ldots} F\,\Theta_{2,n}\left(r^{n+1}+\frac{H^{\rm II}}{r^n}\right)e^{-\lambda^2\gamma^2 t}, \\ \psi_2 = \sum\limits_{n=1,2,3,4\ldots} B\,\Theta_{1,n}(R_{1,n}+K^{\rm I}R_{2,n})e^{-\lambda^2\gamma^2 t} + \sum\limits_{n=-2,-3,-4\ldots} G\,\Theta_{2,n}(R_{1,n}+K^{\rm II}R_{2,n})e^{-\lambda^2\gamma^2 t}, \end{cases}$$

welche noch weiter vereinfacht werden können. Setzen wir nämlich $n=-\nu-1$ in den zweiten Theilen von ψ_1 und ψ_2, so bedeutet ν eine der Zahlen $1, 2, 3\cdots$. Man überzeugt sich leicht, dass

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_{2,n} = \Theta_{1,\nu} \\ r^{n+1} = r^{-\nu},\ r^{-n} = r^{\nu+1} \\ R_{1,n} = R_{2,\nu},\ R_{2,n} = R_{1,\nu} \end{array}\right\}\begin{array}{l} n=-2,-3,-4\cdots \\ \nu = 1, 2, 3\cdots \end{array}$$

Daher dürfen wir zusammenfassend statt (16.) schreiben:

$$(17.)\quad \begin{cases} \psi_1 = \sum\limits_{n=1,2,3\ldots} A\,\Theta_{1,n}\left(r^{n+1}+\frac{H}{r^n}\right)e^{-\lambda^2\gamma^2 t}, \\ \psi_2 = \sum\limits_{n=1,2,3\ldots} B\,\Theta_{2,n}(R_{1,n}+K R_{2,n})e^{-\lambda^2\gamma^2 t}. \end{cases}$$

Da ferner die Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Kugel nicht unendlich gross sein kann, müssen nach (6.) für $r=0$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}=0$$

sein. Hieraus geht hervor, dass $H=K=0$ zu setzen und demgemäss

$$(18.)\quad \begin{cases} \psi_1 = \sum\limits_{n=1,2,3\ldots} A\,\Theta_n r^{n+1} e^{-\lambda^2\gamma^2 t}, \\ \psi_2 = \sum\limits_{n=1,2,3\ldots} B\,\Theta_n R_n e^{-\lambda^2\gamma^2 t}, \end{cases}$$

worin abkürzend

$$(19.)\qquad \Theta_n \text{ statt } \Theta_{1,n} \text{ und } R_n \text{ statt } R_{1,n}$$

geschrieben ist.*)

---

*) Den Zusammenhang der durch die Differentialgleichung (11.) bestimmten Functionen Θ mit den Kugelfunctionen hat Herr *O. E. Meyer* in seiner Abhandlung „Ueber die Bewegung einer Pendelkugel in der Luft" *Borchardts* Journ. Bd. 75 nachgewiesen. Bezeichnet $P^n(\cos\vartheta)$ die Kugelfunction n^{ter} Ordnung, so ist die in (10.)

§. 3. Einige Eigenschaften der Functionen Θ_n und R_n. Grenzbedingung für $r = a$.

Für späteren Gebrauch stellen wir einige Relationen zwischen den Functionen in ϑ und r zusammen.

n und $\mathfrak{n}$ seien zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3 .... Multipliciren wir mit $\Theta_{\mathfrak{n}}$ die Differentialgleichung (11.), mit Θ_n die entsprechende für $\Theta_{\mathfrak{n}}$, so ergiebt sich, wenn man die durch Subtraction derselben entstandene Gleichung auf beiden Seiten zwischen 0 und π integrirt:

$$\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial\Theta_n}{\partial\vartheta}\Theta_{\mathfrak{n}} - \frac{\partial\Theta_{\mathfrak{n}}}{\partial\vartheta}\Theta_n\right)\right]_0^\pi = \left\{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1) - n(n+1)\right\}\int_0^\pi \frac{\Theta_n\Theta_{\mathfrak{n}}}{\sin\vartheta}\,d\vartheta.$$

Nach (15.) verschwinden Θ_n, $\Theta_{\mathfrak{n}}$ für $\vartheta = 0, \pi$; $\frac{\partial\Theta_n}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial\Theta_{\mathfrak{n}}}{\partial\vartheta}$ aber bestehen aus je 2 Factoren, deren einer $\sin\vartheta$ ist, während der zweite für $\vartheta = 0, \pi$ endlich bleibt. Folglich ist

$$(20.)\quad \int_0^\pi \frac{\Theta_n\Theta_{\mathfrak{n}}}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = 0 \qquad n \lessgtr \mathfrak{n}.$$

Bezeichnet man mit R'_n die Function, welche nach Ersetzung von λ durch λ' aus R_n entsteht, mit (13.)' die gleichzeitig aus (13.) entstehende Differentialgleichung, und bildet die Differenz R'_n (13.) — R_n (13.)', so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2}R'_n - \frac{\partial^2 R'_n}{\partial r^2}R_n = (\lambda'^2 - \lambda^2)R_n R'_n$$

und durch Integration nach r zwischen den Grenzen $r = 0$ und $r = a$:

$$(21.)\quad (\lambda'^2 - \lambda^2)\int_0^a R_n R'_n\,dr = \left[\frac{\partial R_n}{\partial r}R'_n - \frac{\partial R'_n}{\partial r}R_n\right]_0^a.$$

---

aufgeführte Function

$$\Theta_n = -\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\int_0^\vartheta P^n(\cos\vartheta)\,d\vartheta$$
$$= \frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\,\frac{dP^n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\,\sin\vartheta.$$

$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\vartheta}$ und $\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\psi_2}{\partial\vartheta}$ sind also als Kugelfunctionenreihen dargestellt, ein Beweis für die Convergenz der von uns gewählten Entwicklung.

Ferner überzeugt man sich leicht, dass

$$(22.)\quad \frac{\partial R_n}{\partial r} - \frac{n+1}{r} R_n + \frac{\lambda^2}{2n+3} R_{n+1} = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach r, so findet man mit Berücksichtigung von (13.) und (22.)

$$(23.)\quad R_n - \frac{R_{n+1}}{r} + \frac{\lambda^2}{(2n+3)(2n+5)} R_{n+2} = 0,$$

eine Recursionsformel, durch welche man R_n durch die beiden trigonometrischen Functionen

$$(24.)\quad R_0 = \frac{1}{\lambda}\sin r\lambda,\quad R_{-1} = \cos r\lambda$$

ausdrücken könnte.

Schreiben wir in (22.) $n+1$ statt n und setzen den daraus erhaltenen Werth von R_{n+2} in (23.) ein, so wird

$$(25.)\quad (2n+3) R_n = \frac{n+1}{r} R_{n+1} + \frac{\partial R_{n+1}}{\partial r}.$$

Für $r = a$ haben wir die Grenzbedingungen

$$(26.)\quad \begin{cases} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_a = E(U - u_a), \\ \eta \left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)_a = -E.\, q_a, \end{cases}$$

wo überall der einer Grösse angehängte Index a den Werth derselben für $r = a$, also u_a und q_a die Werthe der Geschwindigkeitscomponenten eines der Wandung anliegenden Flüssigkeitstheilchens bedeuten. E, der Coefficient der äusseren Reibung, ist seinen Dimensionen nach eine Länge, dividirt durch die Zeiteinheit.

Die erste der Gleichungen (26.) zeigt, dass

$$(27.)\quad U = \Sigma\lambda\, L D e^{-\lambda^2\gamma^2 t}$$

sein muss.

Setzt man die Werthe von u und q aus (6.) in (26.) ein, so ergiebt sich

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_a + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_a = a\,U\sin^2\vartheta,$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)_a + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)_a = a\,U\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

worin zur Abkürzung

$$(28.)\quad \frac{\eta}{E} = \varepsilon$$

gesetzt ist.

Im Falle die Flüssigkeit die Wandung benetzt, wird $E = \infty$, $\varepsilon = 0$.

Da die eben aufgestellten zwei Gleichungen von der Function ψ, unabhängig von der Grösse des Winkels ϑ, erfüllt werden müssen, und weil

$$\Theta_1 = -\sin^2\vartheta,\ \Theta_2 = -\sin^2\vartheta\cos\vartheta,\ \Theta_3 = \sin^2\vartheta\left(\frac{1}{5} - \cos^2\vartheta\right)\ \text{etc.};$$

so haben wir mit Rücksicht auf (27.) die folgenden Bedingungen: für $n = 1$

$$(29.)\quad \begin{cases} 2Aa + B\left\{\varepsilon\lambda^2\left(\frac{R_2}{5r} - R_1\right) + \frac{2}{r}R_1 - \frac{\lambda^2 R_2}{5}\right\}_a = -aLD, \\ 2Aa + 2B\left\{\frac{R_1}{r} - \frac{\varepsilon\lambda^2}{5r}R_2\right\}_a = -aLD \end{cases}$$

und für $n > 1$

$$(30.)\begin{cases} A(n+1)\left\{\varepsilon(n-1)a^{n-1} + a^n\right\} + B\Big\{\varepsilon\left[\frac{\lambda^2}{(2n+3)r}R_{n+1} + \left(\frac{(n+1)(n-1)}{r^2} - \lambda^2\right)R_n\right] \\ \quad + \frac{n+1}{r}R_n - \frac{\lambda^2}{2n+3}R_{n+1}\Big\}_a = 0, \\ A\left\{\varepsilon(n-1)a^n + a^{n+1}\right\} + B\left\{\varepsilon\left[\frac{n-1}{r}R_n - \frac{\lambda^2}{2n+3}R_{n+1}\right] + R_n\right\}_a = 0. \end{cases}$$

Die letzten beiden Gleichungen können, ohne dass $A = B = 0$ gesetzt wird, nur nebeneinander bestehen, wenn

$$(31.)\quad (2n+3)\,\varepsilon a R_n(a) = [(n+2)\,\varepsilon - a]\,R_{n+1}(a). \quad (n > 1)$$

Diese Bedingung fordert, dass alle zu einem $n > 1$ gehörigen λ Wurzeln der Gleichung (31.) sind. Setzt man den Werth eines daraus berechneten λ in eine der Gleichungen (30.) ein, so hat man das Verhältnis von A und B für das System n, λ gefunden. Der Werth von B ergiebt sich durch den Anfangszustand der Flüssigkeitsbewegung. Zur Zeit $t = 0$ sei ψ als eine gegebene Function Ψ von r und ϑ bekannt, so dass

$$(32.)\quad \Psi = \sum_{n=1,2,3\ldots} \Theta_n\left(Ar^{n+1} + BR_n\right).$$

In Folge von (20.) ist

$$\int_0^\pi \Psi\, \Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \int_0^\pi \Theta_n\, \Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\, \Sigma\lambda \left(A r^{n+1} + B R_n\right).$$

und nach (22.)

$$\int_0^\pi \left(\frac{n+1}{r}\Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)\Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \int_0^\pi \Theta_n\, \Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot \Sigma\lambda\, B\lambda^2 R_{n+1}.$$

Die Gleichung (31.) lässt sich durch (25.) transformiren in

$$\left(\frac{\partial R_{n+1}}{\partial r}\right)_a = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\varepsilon}\right) R_{n+1}(a).$$

Sind λ und λ' zwei Wurzeln dieser Gleichung, so ergiebt sich durch ihre letztgeschriebene Form:

$$\left[\frac{\partial R_{n+1}}{\partial r} R'_{n+1} - \frac{\partial R'_{n+1}}{\partial r} R_{n+1}\right]_a = 0;$$

und wenn $\lambda^2 \lessgtr \lambda'^2$, so zeigt (21.), dass

$$\int_0^a R_{n+1} R'_{n+1}\, dr = 0.$$

Daraus folgt, dass das zu einem bestimmten n und λ^2 gehörige B gefunden ist, durch die Gleichung

$$(33.)\quad \int_0^a \int_0^\pi \left(\frac{n+1}{r}\Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) \Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} R_{n+1}\, dr = \frac{B\lambda^2}{2n+3} \int_0^\pi \Theta_n\, \Theta_n \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \int_0^a R_{n+1} R_{n+1}\, dr.$$

Durch diese, sowie durch (30.) und (31.) ist der Theil der Flüssigkeitsbewegung, welcher von der Hohlkugel unabhängig ist, vollständig bestimmt. Wird angenommen, dass Anfangs die Flüssigkeit in Ruhe war, also $\Psi = 0$, so verschwindet jener Theil der Bewegung in allen seinen Termen.

Den für $n = 1$ aufgestellten Bedingungsgleichungen (29.) lässt sich, falls B nicht gleich Null sein soll, nur dadurch genügen, dass man setzt:

$$(31^a.)\quad 5\varepsilon\, a\, R_1(a) = (3\varepsilon - a)\, R_2(a).$$

Diese Gleichung, welche identisch wird mit (31.), wenn man in letzterer $n = 1$ setzt, bestimmt die Werthe von λ^2 in $U = LD.\, e^{-\lambda^2 \gamma^2 t}$ und führt in derselben Weise, wie (31.), zur Kenntnis von B für $n = 1$.

Die Gleichung (33.) liefert diese Constante, wenn man in ihr $n = 1$ setzt; sie wird gleich Null, wenn das Integral linker Hand verschwindet, was z. B. für $\Psi = 0$ stattfindet.

Wollten wir die Gleichung (31ᵃ.) annehmen, so dass B durch (33.) für $n = 1$ bestimmt wäre, so reducirten sich die Gleichungen (29.) auf eine zwischen den beiden noch unbekannten Grössen A und D. Nehmen wir nun der Einfachheit halber an, es sei die Pendellänge L so gross, dass wir von der Oscillation der Flüssigkeit und der Hohlkugel um den zur Pendelebene senkrechten Durchmesser absehen könnten, als von einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung, und denken wir uns die der Gleichung (57.) des §. 5. entsprechende Differentialgleichung für die Bewegung des Pendels aufgestellt, so würde dieselbe, A und D als einzige Unbekannten enthaltend, mit (29.) zusammen zu deren Kenntnis führen.

Die Constanten D und λ^2, welche die Function U zusammensetzen, würden, da die Grössen der anfänglichen Geschwindigkeit und Ablenkung des Pendels in der Pendelgleichung (57.), ebenso wie in der Function Ψ nicht enthalten sind, unabhängig von diesen bestimmt sein. d. h. die Pendelbewegung würde in allen Versuchen, bei denen die Anfangsgeschwindigkeit in der Flüssigkeit immer durch dieselbe Function Ψ gegeben wäre, stets genau dieselbe sein, wie gross auch die anfängliche Geschwindigkeit und Ablenkung des Pendels sein mögen.

Beispielsweise müsste, falls $\Psi = 0$, das Pendel vollkommen dieselbe Bewegung haben, gleichviel ob es eine Anfangsgeschwindigkeit und Ablenkung hatte, oder nicht.

Die Gleichung (31ᵃ.) darf mithin nicht bestehen, vielmehr ist $B = 0$ zu setzen, so dass nach (29.)

$$\text{für } n = 1 \quad A = -\frac{1}{2} L D;$$

also

$$\psi = \Sigma_\lambda \frac{1}{2} L D r^2 \sin^2\vartheta\, e^{-\lambda^2\gamma^2 t} + \psi^{\mathrm{I}},$$

$$\psi^{\mathrm{I}} = \sum_{n=2,3,4\ldots} \Theta_n \left(A r^{n+1} + B R_n\right) e^{-\lambda^2\gamma^2 t}$$

und nach (6.)

$$u = \sum_{=1}^{\lambda} L D e^{-\lambda^2 \gamma^2 t} + \frac{1}{r \sin\vartheta}\left\{\frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial \psi^1}{\partial \vartheta} + \sin\vartheta \frac{\partial \psi^1}{\partial r}\right\},$$

$$q = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial\psi^1}{\partial\vartheta} - \cos\vartheta\frac{\partial\psi^1}{\partial r}\right\}.$$

Hieraus folgt

$$(34.)\quad u_a = U,\ q_a = 0,\ E(U - u_a) = 0,\ -Eq_a = 0,$$

d. h.: *Die in der Hohlkugel eingeschlossene Flüssigkeit kann die Bewegung derselben weder verlangsamen, noch beschleunigen; sie verhält sich in Bezug auf die gradlinige Pendelbewegung, wie ein gleichmassiger fester Körper. Falls die Flüssigkeit keine Anfangsgeschwindigkeit besass, hat jedes Theilchen in ihr dieselbe Geschwindigkeit wie die Kugelwandung.*

Aus (4.) folgt für $\mathfrak{p}$

$$(35.)\quad \left(\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial x}\right)_a = -\varrho\frac{\partial U}{\partial t},\ \left(\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial y}\right)_a = 0,\ \left(\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial z}\right)_a = 0.$$

Der Drucküberschuss an der Wandung der der Gleichgewichtslage abgewandten Hälfte der Hohlkugel ist eine Trägheitsäusserung der eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse.

§. 4. Die Bewegung, welche die Oscillation der Hohlkugel um den zur Pendelebene senkrechten Durchmesser in der Flüssigkeit veranlasst.

Ausgehend von den Gleichungen (2.) und (4.) und von der Voraussetzung, dass sich jedes Theilchen in einer zur Pendelebene parallelen Ebene bewegt, der Art, dass die Geschwindigkeit aller Theilchen auf der Peripherie eines zur Y-Axe senkrechten Kreises, dessen Mittelpunkt in ihr, gleich und gegen den nach dem betreffenden Peripheriepunkt gezogenen Radius gleichgerichtet ist, weisen wir zunächst nach, dass die Bewegung nur längs der Peripherie jenes Kreises stattfinden kann. Durch die Substitutionen

$$(36.)\quad x = \omega\cos\chi,\ z = \omega\sin\chi$$

und die daraus hervorgehenden:

$$u = \varkappa\cos\chi - \omega\sin\chi\cdot\xi,$$
$$v = 0,$$
$$w = \varkappa\sin\chi + \omega\cos\chi\cdot\xi,$$
$$\varkappa = \frac{d\omega}{dt},\qquad \xi = \frac{d\chi}{dt}$$

geht (2.) in

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \omega} + \frac{\varkappa}{\omega} = 0,$$

über, woraus

$$\varkappa = \frac{\text{const.}}{\omega}$$

folgt. Da die Constante nur von y und t abhängig ist, müssen wir, damit auf der Y-Axe die Componente $\varkappa$ (für $\omega = 0$) nicht unendlich gross werde, const. $= 0$, also $\varkappa = 0$ setzen.

Dadurch wird $u = -\omega \sin\chi \,.\, \xi$, $w = \omega \cos\chi \,.\, \xi$ und nach (4.)

$$\varrho\omega\sin\chi \frac{\partial \xi}{\partial t} = \eta\sin\chi \left\{\omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} + 3 \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right\} + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y},$$

$$\varrho\omega\cos\chi \frac{\partial \xi}{\partial t} = \eta\cos\chi \left\{\omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} + 3 \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right\} - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z}.$$

Somit ist

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{d x} \cos\chi + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z} \sin\chi = 0$$

und

$$\varrho\omega \frac{\partial \xi}{\partial t} = \eta\left\{\omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} + 3 \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right\} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \chi}.$$

Auf Grund von (2.) und (4.) ist $\triangle \mathfrak{p} = 0$, also $\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \chi^2} = 0$. Da ferner aus $\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \omega \cdot \partial \chi} = \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial y \cdot \partial \chi} = 0$ folgt, dass $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \chi}$ eine von den Coordinaten unabhängige Constante sein muss, und weil in *einem* Punkte der Y-Axe $\mathfrak{p}$ nur *einen* Werth haben kann, ist $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \chi} = 0$. Daraus geht hervor, dass

$$(37.) \quad \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z} = 0$$

und nach Einführung der Substitutionen

$$(38.) \quad y = r.\cos\theta, \quad \omega = r.\sin\theta$$

die zu integrirende Differentialgleichung ist:

$$(39.) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \gamma^2 \left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{3\, ctg\, \theta}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right\}.$$

Setzen wir

$$(40.)\quad \xi = \frac{1}{r^2}\Sigma(\mathfrak{A}\, Z_{1,n} + \mathfrak{B}\, Z_{2,n})(\mathfrak{C}\, R_{1,n} + \mathfrak{D}\, R_{2,n})\, e^{-\lambda^2\gamma^2 t},$$

so sind $R_{1,n}$ und $R_{2,n}$ die uns aus den vorigen Paragraphen bekannten Functionen, welche der Gleichung (13.) genügen, während

$$(41.)\quad \begin{cases} Z_{1,n} = \sin^{n-1}\theta + \frac{(n+1)(n-1)}{2(1-2n)}\sin^{n-3}\theta + \frac{(n+1)(n-1)^2(n-3)}{2\cdot 4\,(1-2n)(3-2n)}\sin^{n-5}\theta \\ \quad + \frac{(n+1)(n-1)^2(n-3)^2(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\,(1-2n)(3-2n)(5-2n)}\sin^{n-7}\theta + \cdots, \\ Z_{2,n} = \sin^{-(n+2)}\theta + \frac{n(n+2)}{2(2n+3)}\sin^{-(n+4)}\theta + \frac{n(n+2)^2(n+4)}{2\cdot 4\,(2n+3)(2n+5)}\sin^{-(n+6)}\theta \\ \quad + \frac{n(n+2)^2(n+4)^2(n+6)}{2\cdot 4\cdot 6\,(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\sin^{-(n+8)}\theta + \cdots \end{cases}$$

particuläre Integrale sind von

$$(42.)\quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial Z}{\partial\theta}\sin^2\theta\right) = (1-n)(2+n)\, Z\sin^2\theta.$$

Die Constanten n und λ sind der Einfachheit halber mit denselben Buchstaben wie die entsprechenden Grössen der vorhergehenden Paragraphen bezeichnet worden, indes sollen sie vor der Hand mit jenen in keinem Zusammenhang stehen.

Für keinen Werth von θ darf ξ unendlich gross werden.

Wenn für n eine der ungraden positiven Zahlen 1, 3, 5, 7 ... gesetzt wird, bleibt $Z_{1,n}$ für $\theta = 0, \pi$ endlich, dagegen wird in diesem Fall $Z_{2,n}$ gleich ∞ und ist daher $\mathfrak{B} = 0$ zu setzen.

Wenn für n eine der graden negativen Zahlen $-2, -4, -6, -8\cdots$ gesetzt wird, bleibt $Z_{2,n}$ endlich, dagegen wird für $\theta = 0, \pi$ alsdann $Z_{1,n}$ gleich ∞ und ist daher $\mathfrak{A} = 0$ zu setzen.

Im Falle $n = 1, 3, 5, 7\cdots$ würde $R_{2,n}$ und dadurch ξ in der Nähe des Mittelpunkts $(r = 0)$ unendlich gross werden, wenn nicht $\mathfrak{D} = 0$.

Wenn aber $n = -2, -4, -6, -8\cdots$, hat man $\mathfrak{C} = 0$ zu setzen, weil sonst ξ unendlich gross würde, indem $R_{1,n} = \infty$ für $r = 0$. Man hat also:

$$\xi = \frac{1}{r^2}\sum_{n=1,3,5,7\ldots}\mathfrak{A}\, Z_{1,n}\, R_{1,n}\, e^{-\lambda^2\gamma^2 t} + \frac{1}{r^2}\sum_{n=-2,-4,-6\ldots}\mathfrak{B}\, Z_{2,n}\, R_{2,n}\, e^{-\lambda^2\gamma^2 t},$$

oder indem man die bereits oben an Gleichung (16.) angebrachte Vereinfachung auch hier vollzieht,

$$(43.)\quad \xi = \frac{1}{r^3} \sum_{n=1,3,5\ldots} \mathfrak{A}\, Z_n R_n e^{-\lambda^2 \gamma^2 t},$$

wenn zur Abkürzung

$$(44.)\quad Z_n \text{ statt } Z_{1,n},\ R_n \text{ statt } R_{1,n}$$

geschrieben wird.*)

Als Grenzbedingung gilt für die Wandschicht der Flüssigkeit

$$(45.)\quad \eta \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)_a = E(\Xi - \xi_a)^{**}),$$

wenn Ξ die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Hohlkugel oscillirt und das Pendel sich bewegt, bedeutet. Da nun $U = L.\Xi$, also

$$(46.)\quad \Xi = \Sigma \lambda D e^{-\lambda^2 \gamma^2 t}$$

und (45.) unabhängig von der Grösse des Winkel θ erfüllt sein muss, so folgt, dass für $n = 1$, da $Z_1 = 1$,

$$(47.)\quad a^2 D = \mathfrak{A} \left\{ R_1 \left(1 - \frac{2\varepsilon}{r}\right) + \varepsilon \frac{\partial R_1}{\partial r} \right\}_a$$

und wenn $n > 1$

$$(48.)\quad 0 = \left\{ R_n \left(1 - \frac{2\varepsilon}{r}\right) + \varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial r} \right\}_a.$$

Mittelst der Gleichung (47.) ist $\mathfrak{A}$ für $n = 1$ durch D bestimmt, während (48.) die zu $n > 1$ gehörigen λ als ihre Wurzeln liefert.

---

*) Es ist für ganzzahlige ungrade Werthe von n

$$Z_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2.4.6\ldots(n-1)}{(n+2)(n+4)\ldots(2n-1)} \frac{1}{\sin^2\theta} \int_0^\theta P^n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{2.4.6\ldots(n-1)}{n(n+2)\ldots(2n-1)} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d P^n(\cos\theta)}{d\theta},$$

also ist $\int_0^\theta \xi \sin\theta \, d\theta$ als eine Kugelfunctionenreihe dargestellt.

**) Im vorliegenden Fall ist die Grösse der Reibung nicht dem Unterschiede der Lineargeschwindigkeiten $r\xi$, sondern dem der Winkelgeschwindigkeiten ξ proportional zu setzen. Ist letzterer für zwei benachbarte Theilchen Null, so findet zwischen ihnen keine relative Bewegung, also auch keine Reibung statt. Cf. *Lampe*, a. a. O. p. 4. in der Anmerkung.

Die Constante $\mathfrak{A}$ für $n > 1$ berechnet man aus der Winkelgeschwindigkeit, welche zu Anfang des Versuches, zur Zeit $t = 0$, jedes Theilchen hatte. Dieselbe sei gegeben durch die Function

$$(49.)\quad S = \sum_{n=1,3,5\ldots} \mathfrak{A}\, Z_n\, R_n.$$

Die für Z_n aufgestellte Gleichung (42.) multipliciren wir mit $Z_{\mathfrak{n}}$ und ziehen von ihr ab die ihr entsprechende für $Z_{\mathfrak{n}}$, multiplicirt mit Z_n. Nach Integration zwischen 0 und π erhalten wir

$$[(1-n)(2+n)-(1-\mathfrak{n})(2+\mathfrak{n})].\int_0^\pi Z_n\, Z_{\mathfrak{n}} \sin^3\theta\, d\,\theta$$

$$= \left[\sin^3\theta \left(\frac{\partial Z_n}{\partial\theta} Z_{\mathfrak{n}} - \frac{\partial Z_{\mathfrak{n}}}{\partial\theta} Z_n\right)\right]_0^\pi = 0,$$

also

$$(50.)\quad \int_0^\pi Z_n Z_{\mathfrak{n}} \sin^3\theta\, d\,\theta = 0, \text{ wenn } n \lessgtr \mathfrak{n}.$$

Auf Grund von (21.) und (48.) folgt ferner für $n > 1$:

$$\int_0^a R_n\, R'_n\, dr = 0 \qquad \lambda^2 \gtrless \lambda'^2,$$

mithin

$$(51.)\quad \int_0^a\!\!\int_0^\pi S\, Z_n \sin^3\theta d\theta\, R_n\, dr = \mathfrak{A} \int_0^a R_n\, R'_n\, dr. \int_0^\pi Z_n\, Z_n \sin^3\theta\, d\theta,$$

wodurch das zu der Constantencombination λ und n (> 1) gehörige $\mathfrak{A}$ bestimmt ist.

Die Gleichungen (47.), (48.) und (51.) zeigen, dass *die Oscillation der Hohlkugel um den zur Pendelebene senkrechten Durchmesser die eingeschlossene Flüssigkeit zu Oscillationen in gleichem Sinne veranlasst, so zwar, dass die Winkelgeschwindigkeit derselben auf einer mit der Hohlkugel concentrischen Kugelfläche dieselbe ist.*

§. 5. Die Differentialgleichung für die Bewegung des Pendels.

Abgesehen von dem Widerstande, welchen die Bewegung des Pendels in einem umgebenden Medium findet, wirken drei Kräfte bewegend auf das Pendel: die Schwere, der Druck der Flüssigkeit auf die Hohlkugelwandung und die Reibung zwischen letzterer und der Flüssigkeit.

Unter der Annahme, dass der Schwerpunkt der Pendelmasse m_1, in

welche die Masse m_2 der Flüssigkeit in der Hohlkugel nicht mit eingerechnet sein soll, in einer Entfernung l von der Schneide auf der Geraden liegt, welche man durch den Mittelpunkt der Kugel senkrecht zur Schneide zieht, ist

$$(52.)\qquad -m_1 l g W$$

das Moment der in die Richtung der Pendelbahn fallenden Componente des Gewichtes, welches die Pendelmasse bewegt. W bedeutet den momentanen Ablenkungswinkel, so dass

$$(53.)\quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \Xi = \Sigma\lambda D e^{-\lambda^2\gamma^2 t}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\Sigma\lambda D\lambda^2\gamma^2 e^{-\lambda^2\gamma^2 t},\quad W = -\Sigma\lambda \frac{D e^{-\lambda^2\gamma^2 t}}{\lambda^2\gamma^2}. \end{cases}$$

Die nach den drei Axen geschätzten Componenten des auf die ganze Hohlkugelwandung wirkenden Druckes sind nach (3.), (35.) und (37.)

$$\varrho g a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi + a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{p}_a\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$\varrho g a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\sin\vartheta\sin\varphi)\sin^2\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta\, d\varphi + a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{p}_a\sin^2\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$\varrho g a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\sin\vartheta\sin\varphi)\sin^2\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi + a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{p}_a\sin^2\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi\ ^{*}).$$

Durch partielle Integration der zweiten Theile dieser Componenten findet man mit Berücksichtigung von

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial\vartheta}\right)_a = a\sin\vartheta\cdot\varrho\cdot L\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

als Werthe obiger Integrale

$$(54.)\quad \begin{cases} 0 - \frac{4a^3\pi}{3}\varrho L\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -m_2 L\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ 0 + 0 \\ 0 - \frac{4a^3\pi}{3}\varrho g = -m_2 g. \end{cases}$$

Die vermöge der Reibung zwischen der Flüssigkeit und der Hohlkugelwandung auf letzteren wirkenden Kräfte bilden Kräftepaare mit der-

*) ϑ und φ sind die in §. 2. Gl. (5.) eingeführten Coordinaten.

selben Axe, dem zur Pendelebene senkrechten Durchmesser. Ihre Summe ist ein Kräftepaar mit dem Hebelarm $2a$, dessen Moment

$$(55.)\quad \begin{cases} 2a\mathfrak{K} = 2\,Ea^4(\Xi - \xi_a)\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta\, d\chi \\ = \frac{8\pi\eta a^4}{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_a = 2\,a\,m_2\gamma^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_a, \end{cases}$$

und welches die Oscillationsgeschwindigkeit Ξ der Hohlkugel zu verlangsamen strebt.

Unter der Annahme, dass die Mittellinie des Pendelfadens durch das Kugelcentrum geht, geben wir dem Kräftepaar eine solche Lage, dass sein Hebelarm $2a$ den in jene Mittellinie fallenden Durchmesser deckt. Alsdann wirken am Pendelsystem in den Entfernungen $L - a$ und $L + a$ von der Schneide zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $\mathfrak{K}$, deren erste die Richtung der Geschwindigkeit der in der Pendelbahn fortschreitenden Kugel hat. Sie lassen sich an dem System durch eine im Kugelcentrum angreifende, der fortschreitenden Bewegung entgegengesetzte Kraft ersetzen, deren Grösse

$$(56.)\quad -\frac{2a\mathfrak{K}}{L}$$

und deren Moment in Bezug auf die Schneide

$$-2a\,\mathfrak{K}.$$

Schliesslich sei das Trägheitsmoment der Pendelmasse m_1 in Bezug auf die Schneide $m_1(k^2 + l^2)$. Dann wird auf Grund von (52.), (54.) (55.) und (56.) die Differentialgleichung für die Bewegung des Pendels:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\left\{m_1(k^2+l^2) + m_2 L^2\right\} + g\,W(m_1 l + m_2 L) + 2\,a\,m_2\gamma^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_a = 0.$$

Es könnte befremden, dass in dem Factor von $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ das Trägheitsmoment der Flüssigkeitskugel in Bezug auf den Durchmesser, $+\frac{2}{5}m_2 a^2$, fehlt. Das Glied $\frac{2}{5}m_2 a^2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ ist im vorliegenden Falle, wo eine reibende Flüssigkeit an Stelle eines festen Körpers die Hohlkugel erfüllt, durch $2\,a\,m_2\gamma^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_a$ ersetzt, und wenn $\gamma^2 = 0$, d. h. wenn die Flüssigkeit als eine

vollkommene, nicht reibende, angenommen wird, verschwindet jenes Glied. Alsdann existirt aber keine Bewegung ξ in der Flüssigkeit, weil dann nach (39.) $\frac{d\,\xi}{\partial\,t} = 0$, also $\xi = 0$. Eine vollkommene Flüssigkeit bleibt bei der Rotation der begrenzenden Hohlkugel, die äusserste Wandschicht abgerechnet, welche durch etwaige Adhäsion (Reibung) an der Wandung zum Mitschwingen genöthigt sein könnte, vollständig in Ruhe; schon die zweitinnere Schicht kann durch die äussere, wenn $r_i = 0$, nicht mehr bewegt werden. Es muss demnach, weil in diesem Falle keine lebendige Kraft zu einer rotirenden Bewegung der Flüssigkeitskugel verwendet wird, das Trägheitsmoment $\frac{2}{3} m_2 a^2$ in obiger Gleichung fehlen.

Nach Einführung der in (53.) angegebenen Werthe wird aus unserer Pendelgleichung

$$(57.)\quad \lambda^2\gamma^2 + \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2\gamma^2} = \frac{2c\gamma^2}{a}\left[\frac{\frac{\partial R_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1}{R_1 + \varepsilon\left(\frac{d R_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1\right)}\right]_a,$$

worin

$$(58.)\quad \begin{cases} b = L\,\dfrac{m_1\,l + m_2\,L}{m_1(k^2+l^2)+m_2L^2}, \\ c = \dfrac{m_2\,a^2}{m_1\,(k^2+l^2)+m_2L^2}. \end{cases}$$

Die in den Termen von ξ, deren $n = 1$, enthaltenen λ^2 müssen Wurzeln von (57.) sein. Sie sind identisch mit den in Ξ enthaltenen Constanten λ^2.

§. 6. Berechnung der Constanten D. Discussion der Gleichungen (31.) und (48.).

Durch Multiplication von (57.) mit (47.) ergiebt sich

$$(59.)\quad a^2 D\left(\lambda^2\gamma^2 + \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2\gamma^2}\right) = \frac{2c\gamma^2}{a}\,\mathfrak{A}\left[\frac{\partial R_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1\right]_a.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit der für λ'^2 aufgestellten Gleichung (47.), nämlich

$$a^2 D' = \mathfrak{A}'\left\{R_1' + \varepsilon\left(\frac{\partial R_1'}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1'\right)\right\}_a,$$

so finden wir

$$a^4 D D'\left(\lambda^2\gamma^2 + \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2\gamma^2}\right) = \frac{2\pi c\gamma^2}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\left\{\frac{\partial R_1}{\partial r}R_1' - \frac{2}{r}R_1 R_1'\right.$$
$$\left. + \varepsilon\left(\frac{\partial R_1}{\partial r}\frac{\partial R_1'}{\partial r} - \frac{2}{r}\left[R_1\frac{\partial R_1'}{\partial r} + R_1'\frac{\partial R_1}{\partial r}\right] + \frac{4}{r^2}R_1 R_1'\right)\right\}_a$$

Vertauschen wir hierin λ^2 mit λ'^2 und subtrahiren die so geänderte Gleichung von der ursprünglichen, so wird mit Benutzung von (21.)

$$(60.)\quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\int_0^a R_1 R_1' \, dr = \frac{D D' a^5}{2c}\left(\frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2\lambda'^2\gamma^4} - 1\right)$$

unter der Bedingung $\lambda^2 \lessgtr \lambda'^2$.

Weil ferner

$$Z_1 = 1 \text{ und } \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \tfrac{4}{3},$$

ist

$$\mathfrak{A}'\int_0^a R_1'\int_0^\pi S\sin^3\theta \, d\theta \, dr = \tfrac{4}{3}\,\mathfrak{A}'\,\Sigma_\lambda\,\mathfrak{A}\int_0^a R_1 R_1' \, dr$$

und nach (60.)

$$\mathfrak{A}'\int_0^a R_1'\int_0^\pi S\sin^3\theta \, d\theta \, dr = \tfrac{2}{3}\,\frac{a^5 D'}{c}\,\Sigma_{\lambda''}\,D''\left(\frac{g}{L}\frac{b}{\lambda'^2\lambda''^2\gamma^4} - 1\right)$$
$$+ \tfrac{4}{3}\,\mathfrak{A}'^2\int_0^a R_1'^2 \, dr.$$

Das Summenzeichen erstreckt sich über alle Wurzeln $\lambda''^2 \lessgtr \lambda'^2$ von (57.). Nach (53.) ist die anfängliche Winkelgeschwindigkeit und Ablenkung des Pendels:

$$(61.)\quad \Xi_0 = \Sigma D\,,\quad W_0 = -\Sigma\frac{D}{\lambda^2\gamma^2},$$

Führen wir dieselben in die letzterhaltene Gleichung ein und schreiben λ statt λ', so wird:

$$\mathfrak{A}\int_0^a R_1\int_0^\pi S\sin^3\theta \, d\theta \, dr + \tfrac{2}{3}\,\frac{a^5 D}{c}\left(\frac{g}{L}\frac{b\,W_0}{\lambda^2\gamma^2} + \Xi_0\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}\,\frac{a^5 D^2}{c}\left(1 - \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^4\gamma^4}\right) + \tfrac{4}{3}\,\mathfrak{A}^2\int_0^a R_1^2 \, dr.$$

Eliminiren wir hieraus $\mathfrak{A}$ durch (47.), so erhalten wir schliesslich das für $n = 1$ zu λ^2 gehörige D aus:

$$\text{(62.)}\quad Da^3\left[\frac{2c\int_0^a R_1^2\,dr}{a\left\{R_1+\varepsilon\left(\frac{\partial R_1}{\partial r}-\frac{2}{r}R_1\right)\right\}^2_{(r=a)}}+1-\frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^4\gamma^4}\right]$$

$$=a^3\left(\frac{g}{L}\frac{bW_0}{\lambda^2\gamma^2}+\Xi_0\right)+\frac{3c}{2\left\{R_1+\varepsilon\left(\frac{\partial R_1}{\partial r}-\frac{2}{r}R_1\right)\right\}_{(r=a)}}\int_0^a R_1\int_0^\pi S\sin^3\theta\,d\theta\,dr.$$

Nachdem wir nun alle Gleichungen aufgestellt haben, aus denen sämmtliche Constanten des Problems zu berechnen sind, wenden wir uns zur Discussion und physikalischen Deutung derselben, zunächst von (31.) und (48.).

Hätte eine von diesen beiden Gleichungen eine imaginäre Wurzel λ, so müsste sie, da alle Coefficienten in ihr reell, auch die conjugirt imaginäre Wurzel λ' haben. Nun ist aber im §. 3 nachgewiesen, dass, wenn $\lambda^2 \gtrless \lambda'^2$ und beide Wurzeln von (31.) sind, $\int_0^a R_{n+1}\,R'_{n+1}\,dr=0$, eine Gleichung, die für conjugirt imaginäre λ und λ' nicht bestehen kann.

Zu Ende des §. 4. ist ferner in entsprechender Weise gezeigt, dass wenn λ^2 und λ'^2 zwei verschiedene Wurzeln von (48.) sind, die Gleichung $\int_0^a R_n\,R'_n\,dr=0$ gilt. Da aber auch diese für conjugirt imaginäre Werthe λ und λ' nicht bestehen kann, so hat auch (48.) keine imaginäre Wurzel λ.

Sämmtliche Wurzeln λ^2 von (31.) und (48.) sind also positiv; jedes der Glieder, welche die vom Anfangszustand herrührende Bewegung in der Flüssigkeit darstellen, nimmt mit wachsender Zeit stetig gegen Null hin ab.

Es lässt sich aber auch die Zeit $\mathfrak{T}$ bestimmen, nach welcher die Bewegung, welche die Flüssigkeit Anfangs hatte, so weit verbraucht ist, dass sie als eine Grösse zweiter Ordnung nicht mehr merklich ist.

Durch wiederholte Anwendung von (24.) finden wir die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{a\,R_n(a)}{R_{n+1}(a)}=1-\cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+3)(2n+5)}}{1-\cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+5)(2n+7)}}{1-\cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+7)(2n+9)}}{1-\cdots\cfrac{}{1-\frac{a^2\lambda^2}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu+3)}\cdot\frac{aR_{n+\mu}(a)}{R_{n+\mu+1}(a)}}}}}$$

Weil nun $\frac{a^2\lambda^2}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu+3)}\,\frac{a\cdot R_{n+\mu}(a)}{R_{n+\mu+1}(a)}$ für ein unendlich grosses μ verschwindet, indem immer der Quotient aus dem m^{ten} Gliede des Zählers obiger gebrochener Function und dem m^{ten} des Nenners verschwindet, wenn $\mu=\infty$, so darf man den Kettenbruch ins Unendliche fortsetzen und hat:

$$(63.)\quad \frac{a R_n(a)}{R_{n+1}(a)} = 1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+3)(2n+5)}}{1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+5)(2n+7)}}{1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+7)(2n+9)}}{1 - \ddots}}}$$

Darnach können wir statt (31.) und (48.) schreiben

$$(64^a.)\quad \frac{n+1+\frac{a}{\varepsilon}}{2n+3} = \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+3)(2n+5)}}{1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+5)(2n+7)}}{1 - \ddots}}$$

$$(64^b.)\quad \frac{n-1+\frac{a}{\varepsilon}}{2n+1} = \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+1)(2n+3)}}{1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{(2n+3)(2n+5)}}{1 - \ddots}}$$

Wir machen an dieser Stelle eine Voraussetzung, welche uns besonders im folgenden Paragraphen von Nutzen sein wird, nämlich dass $\frac{a}{\varepsilon} > 3$. Um die Zulässigkeit dieser Annahme darzulegen, führen wir einige bekannte Werthe des (von Herrn *Helmholtz* so genannten) oberflächlichen Gleitungscoefficienten ε auf. Nach Herrn *Helmholtz* ist derselbe

für Wasser von 24,5° C. und Gold 0^{cm},23534
„ Alkohol „ 24,05° „ 0^{cm},01096
„ Aether „ 21,6° „ 0^{cm},01243
„ Schwefelkohlenstoff von 21,85° C. und Gold 0^{cm},04430.

Ebenso hat Herr *Helmholtz* aus *Girard*schen Versuchen den Werth von ε für Wasser und Kupfer als $0^{\text{cm}},03984$ berechnet, während in den *Poiseuille*schen Versuchen nach ihm $\varepsilon = 0$ gewesen sein musste. Nach den Versuchen von Herrn *O. E. Meyer* hat ε für Wasser von 19,0° und Oel von 20,4° ungefähr die Grösse von $0^{\text{cm}},05$.

Auf Grund vorstehender Voraussetzung sind die linken Seiten beider Gleichungen (64.) grösser als $\frac{1}{2}$.

Wäre nun in (64^a.) $\frac{a^2\lambda^2}{(2n+3)(2n+5)} \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}$, so wären $\frac{a^2\lambda^2}{(2n+5)(2n+7)}$, $\frac{a^2\lambda^2}{(2n+7)(2n+9)}$ u. s. w. $< \frac{1}{4}$, sämmtliche Differenzen $1 - \frac{a^2\lambda^2}{(2n+5)(2n+7)}$, $1 - \frac{a^2\lambda^2}{(2n+7)(2n+9)}$ u. s. w. wären $> \frac{1}{2}$, der Kettenbruch mithin statt grösser, kleiner als $\frac{1}{2}$. Deshalb muss $\frac{a^2\lambda^2}{(2n+3)(2n+5)} > \frac{1}{4}$ sein. — Aus demselben Grunde muss in (64^b.) $\frac{a^2\lambda^2}{(2n+1)(2n+3)} > \frac{1}{4}$ sein. — Da nun der kleinste Werth von n in den den Anfangszustand der Flüssigkeitsbewegung darstellenden Gliedern 2 ist, so ergiebt sich, dass kein λ^2 jener Terme $\overline{\overline{<}} \frac{35}{4a^2}$ sein kann. Nach Ablauf der Zeit $\mathfrak{T}$, für welche jede der Exponentialfunctionen $e^{-\lambda^2\gamma^2 t}$ eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung der Anfangsgeschwindigkeiten, etwa $= \frac{1}{r^2} S$ wird, ist die Anfangsbewegung als verbraucht zu betrachten. Substituiren wir für den im Experiment unbekannten Werth von $\frac{1}{r^2} S$ den von gleicher Ordnung angenommenen anfänglichen Ablenkungswinkel des Pendels W_0, so ist *die Zeit, nach deren Ablauf man die Beobachtungen berechnen kann, ohne eine Anfangsbewegung in der Flüssigkeit anzunehmen:*

$$(65.)\quad \mathfrak{T} = -\frac{4}{35}\frac{a^2}{\gamma^2}\log.\text{nat.}\, W_0.$$

§. 7. Discussion der Gleichung (57.).

Nach Anwendung von (22.) nimmt (57.) die Form an:

$$(66.)\quad \lambda^2\gamma^2 + \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2\gamma^2} + \frac{2c\lambda^2\gamma^2}{a}\frac{R_2(a)}{5R_1(a) - 2\lambda^2 R_2(a)} = 0,$$

woraus ersichtlich, dass sie keine rein imaginären Wurzeln hat, weil für solche Werthe von λ die linke Seite der Gleichung stets kleiner als Null bleibt.

Hat die Gleichung (57.) oder (66.) eine complexe Wurzel $\lambda = \alpha + i\beta$, so existiren wegen der reellen Coefficienten und der durchweg graden Potenzen in der Gleichung noch die drei anderen complexen Wurzeln

$$\alpha - i\beta, \quad -\alpha + i\beta, \quad -\alpha - i\beta.$$

Genügen nun die beiden conjugirt imaginären Wurzeln $\lambda = \alpha + i\beta$, $\lambda' = \alpha - i\beta$, in denen wir α und β als positiv voraussetzen wollen, der Gleichung (57.), so besteht für sie die Gleichung:

$$(67.) \quad \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2 \lambda'^2 \gamma^4} - 1 = \frac{2c}{a} \frac{\int_0^a R_1 R'_1 \, dr}{\left[R_1 - \varepsilon\left(\frac{\partial R_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1\right)\right]_a \left[R'_1 - \varepsilon\left(\frac{\partial R'_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R'_1\right)\right]_a},$$

welche man erhält, wenn man in (57.) erst λ, dann λ' einsetzt und die so gebildeten Gleichungen mit Berücksichtigung von (21.) von einander subtrahirt. Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung sind positiv, woraus folgt, dass $\frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2 \lambda'^2 \gamma^4} > 1$ sein muss, oder

$$(68.) \quad \alpha^2 + \beta^2 < \frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\frac{gb}{L}}.$$

Da γ^2 nicht unendlich klein ist, sobald wir es mit einer reibenden Flüssigkeit zu thun haben, folgt, dass für die Grösse des Moduls etwaiger complexer Wurzeln eine endliche Grenze gesteckt ist.

Um weiter zu untersuchen, wie viel complexe Wurzeln die besprochene Gleichung haben kann, bilden wir nach (63.) den Kettenbruch:

$$\frac{a R_1(a)}{R_2(a)} = 1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{5\cdot 7}}{1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{7\cdot 9}}{1 - \cfrac{\frac{a^2\lambda^2}{9\cdot 11}}{1 - \ddots}}}$$

welchen wir bei irgend einem vom Anfang hinreichend weit entfernten $(2s-1)^{\text{ten}}$ Zähler ($\frac{a^2\lambda^2}{5\cdot 7}$ sei der erste Zähler und s eine ganze Zahl) abbrechen können, so dass nach Reduction des abgekürzten Kettenbruches auf eine gebrochene Function für alle λ^2, deren Modul kleiner als $\frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\frac{L}{gb}}$, die Gleichung gilt:

$$\frac{a R_1(a)}{R_2(a)} = \frac{F_s(\lambda^2)}{f_{s-1}(\lambda^2)}.$$

Da die Functionen F und f in Bezug auf λ^2 vom s^{ten} resp. $(s-1)^{\text{ten}}$ Grade sind, so zeigt sich, dass in (66.)

$$\frac{R_2(a)}{5 R_1(a) - \varepsilon \lambda^2 R_2(a)} = \frac{f_{s-1}(\lambda^2)}{\frac{5}{a} F_s(\lambda^2) - \varepsilon \lambda^2 f_{s-1}(\lambda^2)}$$

als eine echt gebrochene Function betrachtet und deshalb in Partialbrüche zerlegt werden kann, so lange nur solche Werthe von λ^2 in Betracht kommen, deren mod. $< \frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\frac{gb}{L}}$. Alle Wurzeln von $\frac{5}{a} F_s(\lambda^2) - 2\lambda^2 f_{s-1}(\lambda^2) = 0$, deren mod. jener Bedingung genügen, sind Wurzeln von

$$5 R_1(a) - \varepsilon \lambda^2 R_2(a) = 0$$

und umgekehrt.

Letztere Gleichung hat ebenso wie (48.), welche für $n = 1$ mit Zuhilfenahme von (22.) in diese übergeht, nur positive Wurzeln λ^2. Für die Partialbruchzerlegung kommt es aber darauf an, zu wissen, ob unter ihnen mehrere gleiche vorhanden sind, die kleiner als $\frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\frac{gb}{L}}$. Wäre dies der Fall, so müsste die fragliche Gleichung zugleich mit $\frac{\partial}{\partial \lambda^2}(5 R_1(a) - \varepsilon \lambda^2 R_2(a)) = 0$ durch ein und denselben Werth von λ^2 befriedigt werden können. Weil nun

$$(69.) \qquad \frac{\partial \frac{R_n}{r^{n+1}}}{\partial \lambda} = \frac{r}{\lambda} \frac{\partial \frac{R_n}{r^{n+1}}}{\partial r},$$

so geht letztere Gleichung bei Anwendung von (22.) und (25.) über in

$$5 R_1(a) - \left(\frac{3}{a} - \frac{1}{\varepsilon}\right) R_2(a) = 0.$$

Sollte diese Gleichung mit der besprochenen eine gleiche Wurzel λ^2 haben, die kleiner als $\frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\frac{gb}{L}}$, so müsste dies $\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{a} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$ sein, welchen Werth wir nach der im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzung als negativ ansehen und deshalb nicht als Wurzelwerth gelten lassen können.

Wollte man dagegen beide Gleichungen dadurch neben einander bestehen lassen, dass für ein und dasselbe λ^2 sowohl $R_1(a) = 0$, als auch

$R_2(a) = 0$ würde, so müssten dieselben gleichen Wurzeln wie diese beiden Gleichungen nach (23.) auch

$$R_0(a) = \frac{1}{\lambda} \sin a\lambda = 0 \text{ und } R_{-1}(a) = \cos a\lambda = 0$$

haben. Die ihnen beiden zugleich genügenden Wurzeln sind aber unendlich gross.

Die Gleichung $5R_1(a) - \varepsilon\lambda^2 R_2(a) = 0$ *hat also keine gleichen endlichen Wurzeln.*

Sind $\lambda_1^2, \lambda_2^2 \cdots \lambda_z^2$ ihre nach zunehmender Grösse geordneten endlichen Wurzeln, so gilt die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{R_2(a)}{5R_1(a) - \varepsilon\lambda^2 R_2(a)} = \frac{P_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{P_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \cdots + \frac{P_z}{\lambda^2 - \lambda_z^2},$$

$\left(\text{worin } P_m = -\frac{2}{a - 3\varepsilon + a\varepsilon^2\lambda_m^2}\right)$ für alle λ^2, deren mod. $< \frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\frac{gb}{L}}$.

Alle complexen Wurzeln von (57.) oder (66.) enthält demnach die Gleichung

$$(70.) \quad \lambda^2\gamma^2 + \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2\gamma^2} + \frac{2c\lambda^2\gamma^2}{a}\left\{\frac{P_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{P_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \cdots + \frac{P_z}{\lambda^2 - \lambda_z^2}\right\} = 0.$$

Die Function linker Hand ist zwischen je zwei aufeinanderfolgenden der Wurzeln $\lambda_1^2, \lambda_2^2 \cdots \lambda_z^2$ stetig. Wenn λ^2 zu irgend einem der z Wurzelwerthe angewachsen ist, springt ihr Werth von $+\infty$ in $-\infty$ über, so dass sie, wenn λ^2 successive alle positiven Werthe annimmt, im Ganzen $z - 1$ mal von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig anwächst, also wenigstens ebenso oft auch den Werth Null erreicht. Im Ganzen hat die Gleichung (70.), als vom $(z+2)^{\text{ten}}$ Grade in Bezug auf λ^2, $2z+4$ Wurzeln λ, von denen wenigstens $2z - 2$ reell sind. Weil aber complexe Wurzeln λ nur immer in Gruppen zu je vier auftreten können, so hat (70.), also auch (57.) höchstens vier complexe Wurzeln λ.

Das Vorhandensein der letzteren lässt sich im Allgemeinen analytisch nicht nachweisen, wohl aber, wie der Anfang des nächsten Paragraphen zeigt, im Experiment selbst mit Sicherheit constatiren. Unter Voraussetzung ihrer Existenz zerfällt Ξ in zwei Theile, einen periodischen und einen nichtperiodischen, nämlich:

$$(71.) \quad \Xi = 2(\mathfrak{L}\cos 2\alpha\beta\gamma^2 t + \mathfrak{M}\sin 2\alpha\beta\gamma^2 t)e^{-(\alpha^2-\beta^2)\gamma^2 t} + \sum_{\lambda^2>0} D e^{-\lambda^2\gamma^2 t}.$$

Wenn $\alpha^2 - \beta^2$, wie wir sofort nachweisen werden, positiv ist, *nimmt die Amplitude der periodischen Schwingung, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst, in geometrischer Reihe ab.* Das logarithmische Amplitudendecrement δ des periodischen Theils der Schwingungen und die Schwingungsdauer T sind:

$$(72.)\quad \begin{cases} \delta = (\alpha^2 - \beta^2)\gamma^2, \\ T = \dfrac{\pi}{2\alpha\beta\gamma^2}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(73.)\quad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{1}{2\gamma^2}\left\{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{T^2} + \delta^2} + \delta\right\}, \\ \beta^2 = \dfrac{1}{2\gamma^2}\left\{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{T^2} + \delta^2} - \delta\right\}. \end{cases}$$

Um nun nachzuweisen, dass $\delta > 0$, setzen wir in (66.) den Wurzelwerth $\lambda = \alpha + i\beta$, dann $\lambda' = \alpha - i\beta$ ein und erhalten, wenn wir mit Rücksicht auf (23.) addiren:

$$(74.)\quad \delta\left(1 + \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^2\lambda'^2\gamma^4}\right) = \frac{c\gamma^2}{a}\,\frac{25\left[\dfrac{\partial R_1 R_1'}{\partial r} - \dfrac{4}{r}R_1 R_1'\right]_a + 2\varepsilon\lambda^2\lambda'^2 R_2(a) R_2'(a)}{(5R_1(a) - \varepsilon\lambda^2 R_2(a))(5R_1'(a) - \varepsilon\lambda'^2 R_2'(a))},$$

Gesetzt, es wäre $\delta < 0$, also auch $\lambda^2 + \lambda'^2 < 0$, so müsste

$$\left[\frac{\partial R_1 R_1'}{\partial r} - \frac{4}{r}R_1 R_1'\right]_a = \int_0^a\left(\frac{\partial^2 R_1 R_1'}{\partial r^2} - \frac{4}{r}\frac{\partial R_1 R_1'}{\partial r} + \frac{4}{r^2}R_1 R_1'\right)dr < 0$$

sein. Nach (11.) aber ist

$$\frac{\partial^2 R_1 R_1'}{\partial r^2} = 2\frac{\partial R_1}{\partial r}\frac{\partial R_1'}{\partial r} + \frac{4}{r^2}R_1 R_1' - (\lambda^2 + \lambda'^2)R_1 R_1',$$

so dass nach Gebrauch von (22.)

$$\left[\frac{\partial R_1 R_1'}{\partial r} - \frac{4}{r}R_1 R_1'\right]_a = \int_0^a\left(\frac{2\lambda^2\lambda'^2}{25}R_2 R_2' - (\lambda^2 + \lambda'^2)R_1 R_1'\right)dr$$

unter der obigen Annahme positiv würde.

Es ist also $\delta > 0$.

Weil demnach $\alpha^2 > \beta^2$, so folgt aus (68.), dass

$$2\alpha\beta\gamma^2 < \sqrt{\frac{gb}{L}}$$

oder

$$(75.)\quad T > \pi\sqrt{\frac{L}{gb}}.$$

Die Schwingungsdauer ist also grösser, als wenn eine gleichmassige vollkommene Flüssigkeit an Stelle der reibenden die Hohlkugel erfüllte. Damit ist jedoch nicht gesagt, dass die Schwingungsdauer auch grösser sei als diejenige, welche das Pendel haben würde, wenn die Hohlkugel statt der Flüssigkeit einen festen Körper von gleicher Masse enthielte. Denn wie wir im §. 5. bemerkten, erhält b für den Fall der Ausfüllung der Hohlkugel durch einen festen Körper einen kleineren Werth.

§. 8. Berechnung der im Experiment zu beobachtenden Grössen.

Die experimentelle Beobachtung von T und δ würde beträchtliche Schwierigkeiten haben, wenn die Pendelbewegung, wie (71.) andeutet, aus der Uebereinanderlagerung einer periodischen Schwingung und einer nicht periodischen Bewegung bestände. Es ist daher von wesentlichem Nutzen zu wissen, dass wenigstens nach einer bestimmten Zeit die Pendelbewegung eine einfache Schwingung ist.

Dies nachzuweisen, nehmen wir an, die Flüssigkeit habe entweder keine Anfangsgeschwindigkeit gehabt oder die Zeit $\mathfrak{T} = -\frac{4}{35}\frac{a^2}{\gamma^2}$ log. nat. W_0 sei nach dem Loslassen des Pendels bereits verstrichen, so dass nach §. 6., wenn man die Zeit t von einem darauf folgenden Momente an zu zählen beginnt, in welchem das Pendel grade die Geschwindigkeit Null und die Ablenkung W_0 hat, $S = 0$ zu setzen ist.

Dadurch wird die Gleichung (62.), aus welcher D zu berechnen ist,

$$(76.)\quad D\left[\frac{2c\int_0^a R_1^2\,dr}{a\left\{R_1 + \varepsilon\left(\frac{\partial R_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1\right)\right\}^2_{(r=a)}} + 1 - \frac{g}{L}\frac{b}{\lambda^4\gamma^4}\right] = \frac{g}{L}\frac{b\,W_0}{\lambda^2\gamma^2}.$$

Nach (21.) ist nun

$$\int_0^a R_1^2\,dr = \lim_{\lambda'=\lambda}\left[\frac{\frac{\partial R_1}{\partial r}R_1' - \frac{\partial R_1'}{\partial r}R_1}{\lambda'^2 - \lambda^2}\right]_{(r=a)} = \left[\frac{\frac{\partial R_1}{\partial r}\frac{\partial R_1'}{\partial \lambda'} - \frac{\partial^2 R_1'}{\partial r\,\partial\lambda'}R_1}{2\lambda'}\right]_{\binom{r=a}{\lambda'=\lambda}}$$

Mit Benutzung von (69.) findet man daraus

$$\int_0^a R_1^2\,dr = \frac{a}{2\lambda^2}\left\{\left(\frac{\partial R_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1\right)^2 + \frac{3}{4}R_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial r} - \frac{2}{r}R_1\right) + \lambda^2 R_1^2\right\}_a.$$

Setzt man diesen Werth in (76.) ein, so findet man unter Berücksichtigung von (57.)

$$(77.)\quad \begin{cases} D\,[a^3(a-3\varepsilon)(L\lambda^4\gamma^4+gb)^2+2cLa^2\lambda^2\gamma^4(5L\lambda^4\gamma^4+gb) \\ \quad +a^2\lambda^2\{2c\gamma^4\lambda^2L-\varepsilon a(L\lambda^4\gamma^4+gb)\}^2] = 4cgbLa^2\lambda^4\gamma^6\,W_0. \end{cases}$$

Das zu einem positiven λ^2 gehörige D hat also gleiches Zeichen mit W_0, es kann also $\sum\limits_{\lambda^2>0} De^{-\lambda^2\gamma^2 t}$ nie sein Zeichen ändern und bedeutet einen Geschwindigkeitsüberschuss, welcher nach der anfänglichen Ablenkung W_0 hin gerichtet ist. Hätten wir aber eine Schwingung später die Zeit t zu zählen angefangen, so müsste, weil W_0 alsdann das entgegengesetzte Zeichen hätte, auch jener nichtperiodische Geschwindigkeitsüberschuss die entgegengesetzte Richtung haben, was damit in Widerspruch steht, dass er sein Zeichen nicht ändern kann. Daraus folgt, dass

$$\sum_{\lambda^2>0} De^{-\lambda^2\gamma^2 t} = \sum_{\lambda^2>0} D = 0.$$

Weil aber auch $\Xi_0 = \Sigma D = 0$, so erhalten wir statt (71.)

$$(78.)\quad \Xi = 2\,\mathfrak{M}\sin\frac{\pi t}{T}e^{-\delta t},\qquad \mathfrak{M} = \frac{D(\lambda=\alpha+i\beta)-D'(\lambda=\alpha-i\beta)}{\sqrt{-1}}.$$

Wir gehen nunmehr an die Berechnung von T und δ aus den beiden für $\lambda = \alpha+i\beta$ und $\lambda' = \alpha - i\beta$ aufgestellten Gleichungen (57.), durch deren Addition und Subtraction wir nach Gebrauch von (25.) und (73.) finden:

$$(79.)\quad \begin{cases} \delta\left(1+\dfrac{g}{L}\dfrac{b}{\frac{\pi^2}{T^2}+\delta^2}\right) = \dfrac{3c\gamma^2}{a}\left[\dfrac{R_0-\frac{1}{r}R_1}{R_1+3\varepsilon(R_0-\frac{1}{r}R_1)}+\dfrac{R'_0-\frac{1}{r}R'_1}{R'_1+3\varepsilon(R'_0-\frac{1}{r}R'_1)}\right], \\[2ex] \dfrac{\pi}{T}\left(\dfrac{g}{L}\dfrac{b}{\frac{\pi^2}{T^2}+\delta^2}-1\right) = \dfrac{3ic\gamma^2}{a}\left[\dfrac{R_0-\frac{1}{r}R_1}{R_1+3\varepsilon(R_0-\frac{1}{r}R_1)}-\dfrac{R'_0-\frac{1}{r}R'_1}{R'_1+3\varepsilon(R'_0-\frac{1}{r}R'_1)}\right], \end{cases}$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Unter der Voraussetzung, dass eine endliche Schwingungsdauer T

sich im Experiment als vorhanden erwiesen hat, und dass δ sehr klein ist, sind

$$a\alpha = \frac{a}{\gamma\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{\pi^2}{T^2}+\delta^2}+\delta}$$

und

$$a\beta = \frac{a}{\gamma\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{\pi^2}{T^2}+\delta^2}-\delta}$$

wegen des im Vergleich zu a kleinen Werthes von γ hinreichend gross, um $e^{-a\beta}$ gegen $e^{+a\beta}$ vernachlässigen zu können. Indem wir daher setzen

$$\sin a\lambda = i\cos a\lambda \quad (\lambda = \alpha + i\beta)$$
$$\sin a\lambda' = -i\cos a\lambda' \quad (\lambda' = \alpha - i\beta),$$

haben wir nach (24.) und (23.)

$$3\left[\frac{R_0 - \frac{1}{r}R_1}{R_1 + 3\varepsilon(R_0 - \frac{1}{r}R_1)}\right]_a = \frac{a^2\lambda^2 - 3(1+ia\lambda)}{\varepsilon a^2\lambda^2 + (a-3\varepsilon)(1+ia\lambda)},$$

$$3\left[\frac{R'_0 - \frac{1}{r}R'_1}{R'_1 + 3\varepsilon(R'_0 - \frac{1}{r}R'_1)}\right]_a = \frac{a^2\lambda'^2 - 3(1-ia\lambda')}{\varepsilon a^2\lambda'^2 + (a-3\varepsilon)(1-ia\lambda')}.$$

Mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von δ erhalten wir aus (79.)

$$(80.)\quad \begin{cases} \delta = \dfrac{8c\gamma^2}{a}\,\dfrac{L\sigma^4}{4L\sigma^4+gb}\,\dfrac{P}{N}, \\[2mm] \dfrac{gb}{L\sigma^2} - 4\sigma^2 = 4a^2c\gamma^3\dfrac{Q}{N} \end{cases}$$

zur Berechnung von δ und $\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2T}}$.

In (80.) ist zur Abkürzung gesetzt

$$(81.)\quad \begin{cases} P = 8\varepsilon a^4\sigma^5 + (a-6\varepsilon)a^2\gamma\varkappa_1 - 3(a-3\varepsilon)\gamma^2\varkappa_2 \\ Q = a\sigma^2(4\sigma^2+\delta) - 4\gamma\sigma^3 \\ N = 8\varepsilon^2a^4\sigma^5 + 2\varepsilon a^2\gamma(a-3\varepsilon)\varkappa_1 + (a-3\varepsilon)^2\gamma^2\varkappa_2 \\ \varkappa_1 = a\sigma^2(4\sigma^2-\delta) + 2\gamma\delta\sigma, \quad \varkappa_2 = 4a^2\sigma^3 + 2\gamma^2\sigma - a\gamma(4\sigma^2-\delta).\text{*)} \end{cases}$$

*) Es ist leicht ersichtlich, dass die Gleichungen (80.) und (81.) auch für das

Die Auflösung von (80.) nach δ und σ ist im Allgemeinen nur auf numerischem Wege möglich. Ist jedoch c sehr klein, — eine Voraussetzung, welche fast immer erfüllt sein wird, — so genügt es, in $\frac{Q}{N}$ einen Näherungswerth von σ, etwa $\sqrt[4]{\frac{gb}{4L}}$, und das durch diesen Näherungswerth berechnete δ einzusetzen, so dass

$$(82.)\quad \frac{T^2}{\pi^2} = \frac{m_1(k^2+l^2)+m_2L^2}{g(m_1l+m_2L)}\left(1+c\frac{a^2\gamma^2}{\sigma^2}\frac{Q}{N}\right)$$

$$= \frac{m_1(k^2+l^2)+m_2L^2+m_2a^2\frac{a^2\gamma^2}{\sigma^2}\frac{Q}{N}}{g(m_1l+m_2L)}.$$

Wenn man in $\frac{a^2\gamma^2}{\sigma^2}\frac{Q}{N}$, $\varepsilon = 0$ setzt und die kleineren Grössen δ und γ^2 vernachlässigt, vereinfacht sich der Ausdruck zu $\frac{\gamma}{a\sigma}$. Von diesem Werthe wird $\frac{a^2\gamma^2}{\sigma^2}\frac{Q}{N}$ nur wenig verschieden, gewöhnlich also kleiner als $\frac{2}{5}$ sein.*) Dadurch wird die Schwingungsdauer kleiner als die für das gleiche Pendel, welches in der Hohlkugel statt der Flüssigkeit einen gleichmassigen festen Körper enthält. (cf. §. 7, pag. 31.). Eine Abweichung in diesem Sinne zeigt der *Bessel*sche Versuch mit dem kürzeren Pendel.

Wenn aber L so gross wird, dass $\frac{a^2}{L^2}$ als verschwindend klein zu betrachten ist, dann wird, wie (82.) zeigt, die Schwingungsdauer gleich derjenigen, welche das Pendel haben würde, wenn die Flüssigkeit durch einen gleichmassigen festen Körper ersetzt wäre. Dem entsprechend zeigt die von *Bessel* aus den Versuchen mit dem längeren Pendel berechnete Länge des einfachen Secundenpendels nur eine innerhalb der Beobachtungsfehler liegende Abweichung von der aus den Versuchen mit festen Körpern berechneten.

---

logarithmische Amplitudendecrement und die Schwingungsdauer einer mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel gelten, welche um einen festen verticalen Durchmesser oscillirt, wenn man in den Constanten c und $\frac{gb}{L}$ die Trägheitsmomente in der erforderlichen Weise ändert und als bewegende Kraft statt der Schwere die Torsion des Aufhängefadens einführt.

*) Für Wasser ist $\gamma < 1,^{mm}25$.

Statt der Gleichung (78.) findet man im Falle eines sehr kleinen c durch (77.)

$$(83.)\quad \Xi = -W_0 \sqrt{\frac{gb}{L}} \sin\frac{\pi t}{T} e^{-\delta t}$$

und durch Integration:

$$(84.)\quad W = W_0 \left(\cos\frac{\pi t}{T} + \delta\sqrt{\frac{L}{gb}} \sin\frac{\pi t}{T}\right) e^{-\delta t}$$

Wenn man in (80.) und (82.) $\varepsilon = 0$ setzen darf, so vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$(85.)\quad \begin{cases} \delta = \frac{c\gamma}{a^2} \cdot \frac{2h^2 - \gamma^2}{h^2 + a^2\sigma^2}, \\ \frac{T^2}{\pi^2} = \frac{m_1(k^2 + l^2) + m_2 L^2 + m_2 a^2 \frac{2\gamma h}{h^2 + a^2\sigma^2}}{g(m_1 l + m_2 L)}, \\ h = a\sigma - \gamma. \end{cases}$$

Vorstehende Rechnung ist durchgeführt ohne jede Rücksicht auf den Einfluss, welchen die umgebende Luft auf die Pendelbewegung hat. Trotzdem lassen sich die Reibungsconstanten γ und ε durch die abgeleiteten Formeln aus Beobachtungen im lufterfüllten Raume berechnen, wenn man folgende Methode anwendet. —

μ sei die Masse m eines Körpers, vermindert um die Masse der von ihm verdrängten Luft, so ist nach (82.) die Schwingungsdauer T unseres in der Luft schwingenden Pendels gegeben durch

$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{m_1(k^2 + l^2) + m_2 L^2 + m_2 a^2 \frac{a^2\gamma^3}{\sigma^2} \frac{Q}{N}}{g(\mu_1 l + \mu_2 L)} f(U,O).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Luft während aller Beobachtungen denselben Druck, Feuchtigkeitsgehalt und Temperatur habe, ist der Factor $f(U,O)$ allein von der Geschwindigkeit U, welche das Pendel in jedem Augenblick hat, sowie von der Natur und Gestalt seiner Oberfläche O abhängig. Denn haben zwei Pendel von vollkommen gleicher Oberfläche in jedem Moment genau dieselbe Bewegung, so wird durch sie die umgebende

Luft beidemal in denselben Bewegungszustand versetzt, die Rückwirkung auf die Pendel muss also bei beiden dieselbe sein. Die momentane Geschwindigkeit U ist nun bei constantem Anfangszustande des Pendels eine Function der Schwingungsdauer T und des beobachteten logarithmischen Amplitudendecrements d. Bei constanter Schwingungsdauer und Oberfläche ist daher f allein von d abhängig und lässt sich in die Reihe

$$f = 1 + Ad + Bd^2 + \cdots$$

entwickeln, deren von d freies Glied 1 sein muss, weil, falls $d = 0$, eine aërodynamische Einwirkung auf die Pendelbewegung nicht vorhanden ist. Mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von d wird also

$$\text{(a.)} \quad \frac{T^2}{\pi^2} = \frac{m_1(k^2 + l^2) + m_2 L^2 + m_2 a^2 \frac{a^\pi \gamma^2}{\sigma^2} \frac{Q}{N}}{g(\mu_1 l + \mu_2 L)} (1 + Ad).$$

Das zum Versuch bestimmte Pendel trage nun am Pendelfaden einen rings geschlossenen Hohlcylinder von geeigneter Länge, welcher sich durch eine seitliche Klappe öffnen lässt. Mit diesem Pendel beobachte man die durch (a.) bestimmte Schwingungsdauer T. Alsdann entleere man die Hohlkugel und befestige am Pendelfaden innerhalb des Hohlcylinders einen homogenen Rotationskörper von geometrisch bekannter Gestalt, so zwar, dass seine Rotationsaxe mit der Mittellinie des Pendelfadens zusammenfällt. Man verschiebe ihn solange am Pendelfaden, bis die Schwingungsdauer des anfänglich ebensoweit, wie im ersten Versuch, abgelenkten Pendels wieder dieselbe Länge hat, wie vorher. Alsdann hat man die Gleichung

$$\text{(b.)} \quad \frac{T^2}{\pi^2} = \frac{m_1(k^2 + l^2) + m'(k'^2 + L'^2)}{g(\mu_1 l + \mu' L')} (1 + Ad'),$$

wenn m' die Masse des Rotationskörpers, L' die Entfernung seines Schwerpunktes von der Schneide und $m'(k'^2 + L'^2)$ sein Trägheitsmoment in Bezug auf jene ist. d' ist das jetzt beobachtete logarithmische Amplitudendecrement. Die Constante A hat nach den vorangeschickten Bemerkungen in (a.) und (b.) denselben Werth.

In gleicher Weise verfahre man mit noch zwei anderen Rotationskörpern von den Massen m'' und m''', wodurch man zwei neue Gleichungen erhält, aus denen in Verbindung mit (b.) die drei Grössen $m_1(k^2 + l^2)$, $\mu_1 l$

und A zu berechnen sind.*) Aus (a.) findet man sodann den Werth von $m_2 a^2 \frac{a^2 \gamma^2}{\sigma^2} \frac{Q}{N}$, wodurch eine Gleichung für die zu bestimmenden Grössen γ und ε gewonnen ist.

Durch eine zweite Versuchsreihe mit verändertem Pendel ergiebt sich eine zweite ähnliche Gleichung, welche mit der ersten γ und ε vollständig bestimmt. —

Wir schliessen mit einem kurzen Ueberblick über die Resultate unserer Rechnung.

1.) Die in der Hohlkugel enthaltene Flüssigkeit wird nicht durch ihre gradlinige Fortbewegung, sondern nur durch die Oscillation um den zur Pendelebene senkrechten Durchmesser in Bewegung versetzt. Sie oscillirt ebenfalls um den zur Pendelebene senkrechten Durchmesser mit Winkelgeschwindigkeiten, welche nur auf jeder mit der Hohlkugel concentrischen Kugelfläche constant sind. (§§. 3 und 4.).

2.) Eine etwaige Anfangsbewegung in der Flüssigkeit ist, wenn sie von der Ordnung der Pendelgeschwindigkeit, spätestens nach der Zeit $\mathfrak{T} = -\frac{4}{35} \frac{a^2}{\gamma^2}$ log. nat. W_0 durch die innere Reibung vernichtet. (§. 6.)

3.) Nach Ablauf dieser Zeit $\mathfrak{T}$, oder gleich von Anfang an, wenn die Flüssigkeit bei Beginn des Experiments in Ruhe war, ist die Pendelbewegung *durchaus* periodisch. (§. 8.)

4.) Die Amplitude der Pendelschwingung nimmt, wenn die Zeit in einer arithmetischen Reihe wächst, in einer geometrischen ab. (§. 7.)

5.) Die Schwingungsdauer ist grösser, als wenn dasselbe Pendel statt der reibenden eine vollkommene Flüssigkeit in der Hohlkugel enthielte. (§. 7.)

6) Zumeist wird die Schwingungsdauer kleiner sein, als wenn die Flüssigkeit durch einen gleichmassigen festen Körper ersetzt wäre. Bei sehr grosser Pendellänge hat die innere Reibung der Flüssigkeit gar keinen Einfluss auf die Bewegung des Pendels. (§. 8.)

Carlsruhe, 1873.

---

*) Will man höhere Potenzen von d in f beibehalten, da ihre Coefficienten sehr gross sein könnten, so sind entsprechend mehr Versuche mit Rotationskörpern m'''', m^V etc. erforderlich.

Ueber ebene algebraische Isothermen.

(Von Herrn *H. A. Schwarz* in Zürich.)

Die nachfolgende Untersuchung beschäftigt sich mit der Lösung der Aufgabe: Alle ebenen *isothermischen* Curvenschaaren zu bestimmen, welche von *algebraischen* Curven gebildet werden.

Eine einfach unendliche Schaar von ebenen Curven wird nach *Lamé* *isothermisch* genannt, wenn die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Gleichung derselben in die Form

$$u = c$$

gesetzt werden kann, wo c einen variablen Parameter und u eine der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügende reelle Function der Coordinaten x, y bezeichnet.

Da es im vorliegenden Falle stets möglich ist, die Function u der beiden reellen Variablen x und y durch Hinzufügung einer rein imaginären Function vi derselben Variablen in eine analytische Function $u + vi = w$ des complexen Argumentes $x + yi = z$

$$w = u + vi = f(x + yi) = f(z)$$

überzuführen, so entspricht jeder isothermischen Curvenschaar in der Ebene der complexen Grösse z eine analytische Function $w = f(z)$, welche die conforme Abbildung dieser Curvenschaar auf eine Schaar von parallelen Geraden $u = c$ in der Ebene der complexen Grösse w vermittelt.

Bezeichnet $\varphi(w) = z$ die aus der Umkehrung der Function $w = f(z)$ hervorgehende analytische Function, so ergiebt sich die Uebereinstimmung der oben gestellten Aufgabe mit der folgenden: Alle analytischen Functionen $z = x + yi = \varphi(u + vi) = \varphi(w)$ des complexen Argumentes $w = u + vi$ zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, dass bei der durch dieselben

vermittelten conformen Abbildung von Theilen der Ebene w auf Theile der Ebene z der Schaar paralleler Geraden $u=c$ eine Schaar von *algebraischen* Curven entspricht.

Es sei

$$\varphi(u+vi)=\varphi_1(u,v)+\varphi_2(u,v)\cdot i=x+yi=z,$$

wo φ_1 und φ_2 reelle Functionen der beiden reellen Variablen u und v bezeichnen. Ohne dass der Allgemeinheit der Untersuchung Abbruch geschieht, kann vorausgesetzt werden, dass diese Functionen durch Reihen erklärt sind, welche nach Potenzen von $u-u_0$ und $v-v_0$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten und für alle Werthe dieser Grössen, deren absolute Beträge gewisse Grenzen nicht überschreiten, convergiren. Durch eine Verlegung des Nullpunktes in der Ebene w möge bewirkt werden, dass $u_0=v_0=0$ gesetzt werden kann.

Es wird nun vorausgesetzt, dass innerhalb des Convergenzgebietes dieser Potenzreihen und derjenigen Erweiterung desselben, welche durch analytische Fortsetzung erhalten werden kann, der Schaar paralleler Geraden $u=c$ in der Ebene w eine Schaar von Bogen algebraischer Curven in der Ebene z entspreche. In Folge dieser Voraussetzung besteht für jeden reellen Werth von u, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht überschreitet, zwischen den Grössen $x=\varphi_1(u,v)$ und $y=\varphi_2(u,v)$ eine algebraische Gleichung

$$F(x\,,y\,;u)=0,$$

in welcher die Function F eine ganze Function von x und y bezeichnet, deren Coefficienten reell sind und nur von dem Parameter u abhängen.

Denkt man sich in dieser Gleichung für x und y die vorhin erwähnten Reihenentwickelungen $\varphi_1(u,v)$ und $\varphi_2(u,v)$ gesetzt, so ergiebt sich aus der Berücksichtigung des Umstandes, dass in der entstehenden Reihenentwickelung die Coefficienten aller Potenzen von v einzeln gleich Null sein müssen, eine hinreichende Anzahl von Gleichungen, aus welchen die Verhältnisse der in der Function F vorkommenden Coefficienten als Functionen von u und zwar in der Form convergenter Potenzreihen bestimmt werden können.

Dem Werthe $u=0$ entspreche die Curve $F(x,y)=0$.

Ist diese Curve eine Gerade, so mache man dieselbe mittelst einer

geeigneten Coordinatentransformation, bei welcher ξ und η die neuen Coordinaten sind, zur ξ-Axe. Ist hingegen diese Curve nicht eine Gerade, so kann durch eine vorhergehende conforme Abbildung der Ebene z vermittelst einer *algebraischen* Function ζ bewirkt werden, dass die Curve $F(x, y) = 0$ in der Ebene z und die Gerade $\eta = 0$ in der Ebene der complexen Grösse $\zeta = \xi + \eta i$ einander entsprechen. Zu diesem Zwecke denke man sich die Ebene z etwa durch diejenige algebraische Function ζ des complexen Arguments z conform abgebildet, welche bestimmt ist durch die Gleichung $F\left(\zeta, \frac{z-\zeta}{i}\right) = 0$ und von welcher ein Zweig die Bedingung erfüllt, dass den Punkten des zu betrachtenden Stückes der Curve $F(x, y) = 0$ reelle Werthe von ζ entsprechen

Allen algebraischen Curven in der Ebene z entsprechen bei dieser conformen Abbildung algebraische Curven in der Ebene ζ. Ebenfalls entspricht der der Betrachtung zu Grunde gelegten isothermischen Curvenschaar in der Ebene z eine isothermische Curvenschaar in der Ebene ζ.

Da die durch die Gleichungen $F\left(\zeta, \frac{z-\zeta}{i}\right) = 0$, $z = \varphi(w)$ erklärte Function des complexen Argumentes $w = u + vi$

$$\zeta = \xi + \eta i = \psi(u + vi) = \psi(w)$$

die Eigenschaft besitzt, dass für alle rein imaginären Werthe des Arguments, deren absoluter Betrag eine gewisse Grösse nicht überschreitet, der Werth der Function reell ist, so entspricht bei der durch diese Function vermittelten conformen Abbildung einem Stücke der Geraden $u = 0$ in der Ebene w ein Stück der Geraden $\eta = 0$ in der Ebene ζ, und je zwei Punkten $u + vi$ und $-u + vi$ der Ebene w, welche in Beziehung auf die Gerade $u = 0$ symmetrische Lage haben, entsprechen in der Ebene ζ zwei in Beziehung auf die Gerade $\eta = 0$ symmetrisch liegende Punkte $\xi + \eta i$ und $\xi - \eta i$. Es bestehen also neben einander die Gleichungen

$$\psi(u + vi) = \xi + \eta i$$
$$\psi(-u + vi) = \xi - \eta i.$$

Weil nun in Folge der Voraussetzung die der Schaar paralleler Geraden $u = c$ entsprechende Curvenschaar in der Ebene ζ eine Schaar algebraischer Curven ist, so besteht für jeden Werth von u zwischen ξ und η

eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten nur von u abhängen. Also besteht auch zwischen $\psi(u+vi)$ und $\psi(-u+vi)$ eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten ebenfalls nur von u abhängen.

Ohne dass der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag geschieht, kann die Function $\psi(u+vi)$ als eine Reihe angenommen werden, welche nach Potenzen von $u+vi$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreitet. Hieraus folgt, dass die algebraische Gleichung zwischen $\psi(u+vi)$ und $\psi(-u+vi)$, bei deren Herleitung vorausgesetzt wurde, dass der Variablen v reelle Werthe beigelegt werden, identisch für alle Werthe von v erfüllt ist, für welche die in Betracht kommenden Reihen convergiren.

Setzt man nun $-u+vi=\overline{w}$, so ist $u+vi=\overline{w}+2u$, und man gelangt, wenn man die Grössen $\overline{w}$ und $2u$ wieder mit w und u bezeichnet, zu dem Satze, dass innerhalb der durch die Convergenz der in Betracht kommenden Reihen bedingten Grenzen zwischen

$$\psi(w) \text{ und } \psi(w+u)$$

eine algebraische Gleichung besteht, in welcher die allein von der Grösse u abhängenden Coefficienten als Reihen angenommen werden können, welche nach Potenzen von u mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten.

Für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werthe von w und u ist nun die Function $\psi(w+u)$ in eine nach Potenzen von u fortschreitende convergente Reihe

$$\psi(w+u)=\psi(w)+\psi'(w)\cdot u+\tfrac{1}{2}\psi''(w)\cdot u^2+\cdots$$

entwickelbar. Diese Entwickelung denke man sich in der zwischen $\psi(w)$ und $\psi(w+u)$ bestehenden Gleichung für $\psi(w+u)$ gesetzt und die entstehende Gleichung nach Potenzen von u geordnet. Dann ergiebt sich, da diese Gleichung für alle innerhalb des Convergenzbereiches liegenden Werthe von u erfüllt sein muss, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von u einzeln gleich Null sein müssen.

Hieraus folgt zunächst, dass zwischen $\psi(w)$ und $\psi'(w)$ eine algebraische Gleichung mit *constanten* Coefficienten bestehen muss.

Die angestellte Untersuchung hat somit ergeben, dass unter den angegebenen Voraussetzungen $\frac{1}{\psi'(w)}=\frac{dw}{d\zeta}$ eine *algebraische* Function von

$\psi(w) = \zeta$, mithin $w = u + vi$ das *Integral einer algebraischen Function* von $z = x + yi$ sein muss. Diese Bestimmung der Function $w = f(z)$ ist aber, wie man sich leicht überzeugen kann, noch zu weit.

Die zwischen $\psi(w)$ und $\psi(w+u)$ bestehende algebraische Gleichung, deren Coefficienten von u abhängen, denke man sich nun in Beziehung auf w differentiirt,*) und diese Differentiation so oft wiederholt, bis man eine hinreichende Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse der allein von der Grösse u abhängenden Coefficienten erhalten hat. Denkt man sich hierauf in dem Resultate, welches den gemachten Voraussetzungen zufolge von dem speciellen Werthe der Variablen w unabhängig sein muss, dieser Variablen den Werth Null beigelegt, so gelangt man zu dem Schlusse, dass jene Verhältnisse durch die Function $\psi(u)$ und eine endliche Anzahl von Ableitungen dieser Function rational ausdrückbar sind. Da nun die Ableitungen von $\psi(u)$ mittelst der zwischen $\psi(u)$ und $\psi'(u)$ bestehenden algebraischen Gleichung eliminirt werden können, so ergiebt sich aus der zwischen $\psi(w)$ und $\psi(w+u)$ bestehenden algebraischen Gleichung, deren Coefficienten noch von u abhängen, eine algebraische Gleichung zwischen $\psi(u)$, $\psi(w)$ und $\psi(u+w)$ mit *constanten* Coefficienten, mit anderen Worten, die Function $\psi(w)$ besitzt ein algebraisches Additionstheorem.

Da nun die Function $\varphi(w)$ mit der Function $\psi(w)$ durch eine algebraische Gleichung verbunden ist, so besitzt auch die Function $\varphi(w)$ ein algebraisches Additionstheorem.

Es ist also durch die vorhergehende Untersuchung der Satz bewiesen: Wenn eine Function $\varphi(w)$ des complexen Argumentes $w = u + vi$ die Eigenschaft hat, dass, während u und v zwei reelle Veränderliche bezeichnen, für jeden constanten Werth von u zwischen dem reellen und dem imaginären Bestandtheile der Function $\varphi(u+vi)$ eine algebraische Gleichung besteht, so besitzt diese Function ein algebraisches Additionstheorem.

Nun ist eine analytische Function eines Argumentes w, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt, nach einem fundamentalen Lehrsatze,

*) Vgl. die Abhandlung *Abels*: Méthode générale de trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables indépendantes, Oeuvres T. II. pag. 213—221.

welchen Herr *Weierstrass* aufgestellt und bewiesen hat, und dessen Kenntniss ich den Vorlesungen desselben verdanke, entweder

I. eine *algebraische Function* von w,

oder wenn μ eine passend gewählte Constante bezeichnet,

II. eine algebraische Function der *Exponentialfunction* $e^{\mu w}$, oder

III. eine algebraische Function einer *elliptischen Function* im engeren Sinne, z. B. von $\sin\operatorname{am}(\mu w; k)$.

Dieser Satz, welcher die analytische Natur der elliptischen Functionen noch charakteristischer ausspricht, als deren doppelte Periodicität dies zu thun geeignet ist, führt auch zu den *Fundamentalsystemen* der isothermischen algebraischen Curvenschaaren, d. h. solchen Schaaren isothermischer algebraischer Curven, aus denen alle übrigen durch conforme Abbildung mittelst *algebraischer* Functionen hergeleitet werden können.

Wird $w = u + vi$ gesetzt, so ist im ersten Falle die Schaar der parallelen Geraden $u = c$ selbst das Fundamentalsystem.

Damit im zweiten Falle der Schaar paralleler Geraden $u = c$ eine Schaar *algebraischer* Curven entspreche, ist erforderlich, dass der Multiplicator μ entweder einen rein imaginären oder einen reellen Werth habe. Die beiden Fundamentalsysteme dieses Falles sind: Die Schaar aller durch einen Punkt gehenden Geraden und die zu dieser Schaar orthogonale Schaar concentrischer Kreise.

Im dritten Falle kann der Schaar $u = c$ nur dann eine Schaar algebraischer Curven entsprechen, wenn der Modul k der in Betracht kommenden elliptischen Function reell ist oder ein zu einem reellen Modul gehörender transformirter Modul ist.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, werde angenommen, es sei k nicht reell und es seien k_1 und μ_1 die zu den Grössen k und μ gehörenden conjugirten complexen Grössen. Damit nun der Geraden $u = 0$ in der Ebene w bei der Abbildung durch die Function

$$z = \sin\operatorname{am}(\mu w; k)$$

eine algebraische Curve entspreche, ist nothwendig, wenn $w = vi$ gesetzt und die Veränderlichkeit der Grösse v zunächst auf reelle Werthe beschränkt wird, dass zwischen dem reellen und dem imaginären Bestandtheile von

$\sin\operatorname{am}(\mu v i; k)$ eine algebraische Gleichung besteht. Hieraus folgt, dass auch zwischen $z = \sin\operatorname{am}(\mu v i; k)$ und $z_1 = \sin\operatorname{am}(-\mu_1 v i; k_1)$ eine algebraische Gleichung bestehen muss. Da diese algebraische Gleichung nicht bloss für die reellen, sondern überhaupt für alle Werthe von v erfüllt sein muss, so ergiebt sich, dass der Modul k_1 ein zu dem Modul k gehörender transformirter Modul ist, denn unter den angegebenen Voraussetzungen besteht die Gleichung

$$v = \frac{1}{\mu i}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \frac{1}{-\mu_1 i}\int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k_1^2 z_1^2)}}.$$

Es seien nun $A + Bi$ und $A' + B'i$, wo A, B, A', B', reelle Grössen bezeichnen, ein Paar Fundamentalperioden der Variabeln v, vorausgesetzt, dass dieselbe als Function von z betrachtet wird. Hierbei möge angenommen werden, es sei die Periode $A + Bi$ so gewählt, dass weder A noch B gleich Null ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt, dass $A - Bi$ und $A' - B'i$ ein Paar Fundamentalperioden der Variabeln v sind, vorausgesetzt, dass dieselbe als Function von z_1 betrachtet wird. Die allgemeine Theorie der Transformation der elliptischen Integrale lehrt aber, dass es möglich sein muss, $A - Bi$ und $A' - B'i$ linear und mit *rationalen* Zahlencoefficienten durch $A + Bi$ und $A' + B'i$ auszudrücken. Man erhält also, wenn α, β, γ und δ rationale Zahlen bezeichnen, zunächst

$$A - Bi = \alpha(A + Bi) + \beta(A' + B'i),$$
$$A' - B'i = \gamma(A + Bi) + \delta(A' + B'i)$$

und durch Trennung des Reellen und des Imaginären

$$(1-\alpha)A = \beta A',\ (1+\alpha)B = -\beta B',\ \gamma A = (1-\delta)A',\ \gamma B = -(1+\delta)B',$$

wobei zwischen den vier Grössen α, β, γ, δ die Relationen

$$\alpha + \delta = 0,\quad \alpha\delta - \beta\gamma = -1$$

bestehen müssen.

Die Verhältnisse $A' : A$ und $B' : B$ sind also *rationale* Zahlen, und daher ist es möglich, jedes der beiden Integrale, durch welche die Variable v dargestellt ist, mittelst einer algebraischen Substitution in ein elliptisches Integral zu transformiren, dessen Fundamentalperioden etwa A und Bi sind, dessen Modul also *reell* ist.

Denkt man sich nun die angedeutete Transformation ausgeführt, so erhält die Schaar der Parallelen $u = c$ gleiche Richtung mit einer der beiden Fundamentalperioden von v. Ohne dass der Allgemeinheit der Untersuchung Abbruch geschieht, kann demnach von vornherein angenommen werden, dass sowohl der Modul k als auch der Multiplicator μ je einen *reellen* Werth habe.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich das Resultat, dass als Fundamentalsysteme des Falles III. die Schaaren der *Siebeck*schen Curven vierten Grades*) anzusehen sind, welche bei der conformen Abbildung mittelst der Function

$$z = \sin \operatorname{am} (u + vi),$$

reelle Werthe des Moduls vorausgesetzt, für constante Werthe von u beziehungsweise von v sich ergeben, welche Curvenschaaren auch als stereographische Projectionen von Schaaren *confocaler sphärischer Kegelschnitte* erklärt werden können.

In allen drei Fällen ist die Schaar derjenigen Curven, welche die Curven des isothermischen Fundamentalsystems orthogonal schneiden, nicht bloss wieder isotherm, wie dies aus der Betrachtung der conformen Abbildung unmittelbar sich ergiebt, übereinstimmend mit einem von *Lamé* ausgesprochenen Lehrsatze, sondern wird auch wieder von *algebraischen* Curven gebildet.

Dieser Satz lässt sich nach dem Vorhergehenden folgendermassen verallgemeinern: Die orthogonale Curvenschaar einer Schaar ebener algebraischer Isothermen ist stets wieder eine Schaar *algebraischer* Isothermen.

Bei der Umkehrung des Abhängigkeitsverhältnisses, welches zwischen den beiden, wie die Untersuchung gezeigt hat, unbeschränkt veränderlichen Grössen $z = x + yi$ und $w = u + vi$ besteht, ergiebt sich also schliesslich folgendes Resultat:

Die complexe Grösse $w = f(z)$, deren reeller Theil u längs jeder einzelnen Curve einer von algebraischen Curven gebildeten, in der Ebene der complexen Grösse z liegenden isothermischen Curvenschaar einen constanten Werth hat, ist

---

*) *Siebeck*: Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen, dieses Journal Bd. 57 und 59.

entweder

I. eine *algebraische Function* von z,

oder es ist, wenn μ eine passend gewählte reelle Zahlgrösse bezeichnet,

II. die Grösse μw, beziehungsweise $\mu w i$ der *Logarithmus einer algebraischen Function* von z,

oder es ist

III. die Grösse μw ein *elliptisches Integral erster Art*, in der *Jacobi*schen Normalform, mit reellem Modul, dessen obere Grenze eine *algebraische Function* von z ist.

Hiermit ist die am Anfange dieses Aufsatzes gestellte Aufgabe gelöst.

Zürich, im Februar 1873.

Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung.

(Von Herrn *Leonhard Sohncke* in Carlsruhe.)

Einleitung.

§. 1. Die folgende Untersuchung ist aus dem Bedürfniss hervorgegangen, für die Theorie der Krystallstructur eine völlig sichere Grundlage zu gewinnen. Als wahrscheinlichste Vorstellung von der Anordnung der Krystallelemente galt bisher die von *Delafosse* eingeführte und von *Bravais* weiter entwickelte, nach welcher jene Elemente ein Raumgitter bilden, d. h. mit ihren Schwerpunkten in den Schnittpunkten dreier paralleler Züge von je äquidistanten Ebenen liegen und selbst parallel orientirt sind. Diese ohne hinreichenden Beweis aufgestellte Ansicht habe ich dann strenger zu begründen gesucht,*) indem ich sie aus dem Princip der regelmässigen Punktvertheilung ableitete.

Indessen kann mit der *Bravais*schen Vorstellung das Wesen der Krystallstructur nicht erschöpft sein. Denn obwohl die Raumgitter in sieben durch ihre Symmetrieverhältnisse unterschiedene Klassen zerfallen, welche den Krystallsystemen vollkommen entsprechen, so finden doch die hemiedrischen Krystalle, z. B. das Tetraeder, in diesen Klassen keinen Platz, und es bedarf neuer Hypothesen, um sie darin unterzubringen. Ferner giebt es Punktanordnungen, welche, ohne zu den Raumgittern zu gehören, doch dem Grundsatz der regelmässigen Punktvertheilung genügen, und auf welche meine frühere Ableitung nur desshalb nicht geführt hat, weil die stillschweigende Voraussetzung gemacht wurde, dass zwei von verschiedenen Punkten ausgehende und je zu ihrer Umgebung übereinstimmend gelegene Richtungen auch parallel sein müssten, was durchaus nicht nöthig ist. — Ein solches nicht zu den Raumgittern gehöriges regelmässiges Punktsystem

*) Die Gruppirung der Moleküle in den Krystallen In *Poggendorffs* Annalen der Physik 1867, Bd. 132, Seite 75.

giebt übrigens schon *Wiener**) an; und sein wiederholt gegen mich geltend gemachter Widerspruch ist es auch, der vor Allem die folgende Untersuchung hervorgerufen hat.

Capitel I.

Formulirung der Aufgabe. Aufsuchung einer speciellen Art regelmässiger Punktsysteme.

§. 2. In einer ganz beliebigen unbegrenzten Anordnung von Punkten werde ein Punkt mit allen übrigen durch gerade Linien verbunden gedacht. Die in derselben Weise von allen Punkten aus construirten Linienbündel werden im Allgemeinen verschieden sein. Es sind aber Systeme denkbar, bei denen die Punktvertheilung um jeden Punkt dieselbe ist wie um jeden andern, so dass die von allen Punkten ausgehenden Linienbündel untereinander übereinstimmen.

Wenn aber die Linien eines Bündels denen eines zweiten gleich sind und auch dieselben Winkel miteinander bilden wie jene, so sind noch zwei Fälle möglich: Entweder lassen sich beide Bündel zur Deckung bringen; oder sie lassen sich nur in die Lage von Object und Spiegelbild bringen. Hiernach hat man folgende

Erklärung: Ein Punktsystem von unbegrenzter Ausdehnung heisse regelmässig, wenn die von allen seinen Punkten ausgehenden Linienbündel übereinstimmen, indem sie entweder sämmtlich congruent, oder theils congruent, theils symmetrisch sind.

Von beiden Arten regelmässiger Systeme ist nur die erste von allgemeiner Anwendbarkeit auf die Theorie der Krystallstructur, weil die Krystallelemente im Allgemeinen als congruent vorausgesetzt werden müssen, woraus dann die Congruenz der von ihren Schwerpunkten ausgehenden Linienbündel folgt. Indessen dürfte die zweite Art zur Erklärung mancher speciellen Krystallerscheinungen nöthig sein.

Bei Beschränkung auf die Ebene ist die Unterscheidung congruenter und symmetrischer Linienbündel ebenfalls von Vortheil, obwohl sie nur dann einen Sinn hat, wenn festgesetzt wird, dass die Figuren nur *in* der Ebene

---

*) *Chr. Wiener*: Grundzüge der Weltordnung. 1863, S. 86. Und dann: Atomenlehre. 1869, S. 82 ff.

beweglich sein sollen. Denn sobald man gestattet, eine von zwei *in* der Ebene symmetrischen Figuren herauszunehmen und umgewandt wieder hineinzulegen, kann man sie mit der andern zur Deckung bringen. Daher lassen *sämmtliche* regelmässigen Punktsysteme der unbegrenzten Ebene eine Anwendung auf die Krystallographie zu. — Nun lautet die im Folgenden gelöste *Aufgabe:*

Aufsuchung aller überhaupt möglichen regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung.

§. 3. Die systematische Aufsuchung wird wesentlich vereinfacht durch die vorhergehende Behandlung folgender speciellen Aufgabe:

Aufsuchung aller solchen regelmässigen unbegrenzten ebenen Punktsysteme, in denen ganz- oder halbreguläre isolirte Polygone, — durch Systempunkte bestimmt, — vorkommen, und welche ferner die Eigenschaft haben, dass die jenen Polygonen umschriebenen Kreislinien keine weiteren Systempunkte tragen.

Hier ist unter einem *isolirten* Polygon ein solches verstanden, das keinen Eckpunkt mit einem ihm congruenten Polygon gemein hat; und *halbregulär* sind Polygone mit gleichen Winkeln und abwechselnd gleichen Seiten genannt.

Zunächst ist klar, dass die Lage von Punkten als Ecken eines ganz- oder halbregulären isolirten Polygons mit der Regelmässigkeit des Systems verträglich ist, da die Linienbündel von allen Ecken des Polygons nach allen Ecken desselben congruent oder symmetrisch sind.

Ein Polygonalsystem der beschriebenen Art sei jetzt gegeben, und eins der Polygone werde betrachtet. Nun ist es von vornherein nicht bekannt, ob in demselben System nicht reguläre oder halbreguläre Polygone, die kleineren Kreisen eingeschrieben sind, und die dieselbe oder andere Seitenzahl als das eben betrachtete haben, vorkommen. Wenn dies der Fall, so soll dasjenige ganz- oder halbreguläre isolirte Polygon, welches dem kleinsten Kreise eingeschrieben ist, — und wenn es hiervon noch mehrere Arten giebt, so soll von ihnen dasjenige mit der kleinsten Seitenzahl, und hier wieder mit Bevorzugung des ganz- vor dem halbregelmässigen, — der folgenden Betrachtung zu Grunde gelegt werden.

Auf der Peripherie des ihm umschriebenen Kreises steht kein anderer Punkt des Systems. Wegen der Unbegrenztheit muss das System

noch andere Punkte als die in den Ecken des Ausgangspolygons liegenden enthalten; und wegen der Regelmässigkeit muss jeder Punkt des Systems in einer Ecke eines dem Ausgangspolygon congruenten Polygons liegen. Der Mittelpunkt eines solchen neuen Polygons könnte nur dann mit dem des vorigen zusammenfallen, wenn die neuen Punkte auf derselben Kreislinie lägen wie die alten, und das ist ausdrücklich ausgeschlossen. Unter allen dem anfänglichen congruenten Polygonen wird nun ein solches ausgewählt, dass der Mittelpunkt keines anderen näher als dieser (M_1) am Mittelpunkt des Ausgangspolygons (M) liegt. Der zu M_1 nächste Eckpunkt des Ausgangspolygons (oder einer der zwei nächsten) sei A; der zweitnächste B, die folgenden C, D, $\cdots$.

Zunächst wird der specielle Fall erledigt, dass M_1 mit A zusammenfällt. Dann muss jeder Systempunkt der Mittelpunkt eines dem anfänglichen congruenten Polygons sein; also muss auch M mit einem Punkt des Systems besetzt sein. Da nun M auf der Peripherie des mit MA um A beschriebenen Kreises liegt, muss es ein Eckpunkt des zum Mittelpunkt A gehörigen Polygons sein; sonst wäre ja die Peripherie des diesem umschriebenen Kreises noch mit anderen Systempunkten besetzt, und wegen der Regelmässigkeit müsste es dann ebenso mit dem Ausgangspolygon sein, — was gegen die Voraussetzung. In derselben Weise muss M auch Eckpunkt des, dem vorigen congruenten, zu B als Mittelpunkt gehörigen Polygons sein u. s. f. Dann also ist M gleichzeitig Ecke mehrerer congruenter Polygone; also sind diese nicht mehr isolirt; ebenso wäre dann das Polygon um M nicht mehr isolirt, und das ist gegen die Voraussetzung. Also darf bei den in diesem Capitel behandelten Systemen A und M_1 nicht zusammenfallen.

Jetzt mögen A und M_1 getrennt liegen.

Dem Bündel von Linien, die von A nach den übrigen Ecken des Ausgangspolygons und nach allen Ecken des Nachbarpolygons um M_1 verlaufen, muss ein congruentes oder symmetrisches Bündel bei B entsprechen. Für letzteres Bündel sind, da das Ausgangspolygon isolirt ist, nur zwei Lagen möglich:

Entweder entspricht Linie BC dieses Bündels der Linie AB des ersten; dann sind beide Bündel congruent.

Oder BA entspricht der Linie AB des ersten; dann sind beide symmetrisch und haben auch symmetrische Lage.

1) Im ersteren Fall, der zunächst betrachtet wird, ist das halbreguläre Polygon ausgeschlossen. Das congruente Bündel bei B bestimmt ein neues dem vorigen congruentes Polygon mit dem Centrum M_2. Die von A aus nach seinen Ecken gezogenen Linien vermehren das anfänglich gegebene Bündel bei A. Um die entsprechenden Linien muss das Bündel bei B vermehrt werden, und hierdurch wird wieder ein neues congruentes Polygon mit dem Centrum M_3 bestimmt. So fortschliessend erkennt man, dass auf der mit dem Radius MM_1 um M beschriebenen Kreislinie in gleichen Abständen die Centra von lauter congruenten Polygonen liegen müssen, und zwar so viele, als das Ausgangspolygon Ecken hat: *Hieraus folgt, dass diese Anordnung nur bei solchen regulären Polygonen stattfinden kann, deren Seitenzahl nicht* $>$ 6 *ist*; denn im anderen Fall würden zwei Nachbarcentra auf der Kreislinie einen kleineren Abstand als MM_1 haben, die Regelmässigkeit würde fordern, dass auch von M ein Polygoncentrum diesen kleineren Abstand hätte; und dann wäre M_1 nicht mehr das nächste Centrum bei M, was doch vorausgesetzt wurde. — Von den herumstehenden regulären n-Ecken ist jedes folgende um $\frac{4R}{n}$ gegen das vorhergehende gedreht, folglich steht es ihm wieder parallel. Die genauere Untersuchung dieser Systeme giebt der folgende Paragraph.

2) *Jetzt entspreche in dem von B ausgehenden Bündel Linie BA der Linie AB des von A ausgehenden.* Dann wird ein Polygon mit Centrum M_2 gefordert, symmetrisch gelegen zu jenem um M_1 in Bezug auf den zur Seite AB gehörigen kleinen Halbmesser des Ausgangspolygons. Ein dem Bündel bei A entsprechendes muss ferner bei C liegen, doch ist dies wieder auf zwei Arten möglich, indem entweder CB oder CD der Linie AB entsprechen kann.

Der erste Fall führt auf nichts Neues. Denn: Linie CB des Bündels bei C entspricht der AB des Bündels bei A; letztere Linie entspricht BA des Bündels bei B. Also entspricht CB des Bündels bei C der Linie BA des Bündels bei B, so dass die von C und B auslaufenden Bündel congruent sind. Nun aber sind alle Systeme, bei denen von zwei benach-

barten Ecken des Ausgangspolygons congruente Linienbündel ausgehen, im Fall 1) enthalten, so dass der jetzt vorliegende Fall nur Specialsysteme der dorthin gehörigen enthalten kann.

Im andern Falle, wo CD des Bündels bei C der Linie AB des Bündels bei A entspricht, werden zwei Polygone mit den Mittelpunkten M_3 und M_4 gefordert, die zu CD ebenso liegen, wie die Polygone M_1 und M_2 zu AB, so dass von den bis jetzt construirten vier Aussenpolygonen je zwei benachbarte symmetrisch stehen. Vermehrt man jetzt das von A ausgehende Bündel um die nach den Ecken der zwei neuen Polygone gehenden Linien, so muss auch das Bündel bei C in derselben Weise vermehrt werden. So fortschliessend erkennt man, dass immer zu den abwechselnden Seiten des Ausgangspolygons je zwei Aussenpolygone gehören, während den zwischenliegenden Seiten keine Polygone zugeordnet sind.

Hätte nun das Ausgangspolygon ungerade Seitenzahl, so führte diese Schlussweise darauf, dass zu *allen* Seiten je zwei Aussenpolygone gehörten. Dann wären die von allen Ecken ausgehenden Bündel congruent, so dass man wieder den, als nichts Neues liefernd, eben zurückgewiesenen Fall hätte. Die Seitenzahl sei also jetzt *gerade*. Dann kann das Polygon sowohl ganz- als halbregulär sein. Zwei Fälle sind zu unterscheiden, je nachdem alle Aussenpolygone frei stehn oder paarweise mit den Mittelpunkten zusammenfallen.

a) Im ersteren Fall ist die Zahl der herumstehenden Polygone gleich der Seitenzahl des Ausgangs-Polygons, so dass das letztere *ein ganz- oder halbreguläres Vier- oder Sechseck* sein kann. Dass Polygone von grösserer Seitenzahl ausgeschlossen sind, folgt wie bei Fall 1).

b) Wenn aber die Mittelpunkte der Aussenpolygone paarweise zusammenfallen, so ist das nur so möglich, dass die Verbindungslinie des Zusammenfallpunkts $\mathfrak{M}$ mit dem Ausgangscentrum M eine Seite des Ausgangspolygons halbirt. Ferner ist es nöthig, dass nicht nur die Mittelpunkte, sondern die ganzen Polygone zur Deckung gelangen; sonst trüge der dem einen von ihnen umschriebene Kreis noch andere Punkte; dies müsste bei dem congruenten Ausgangspolygon ebenso sein, und das war ausgeschlossen. Da die zusammenfallenden Polygone in Bezug auf die Linie $M\mathfrak{M}$ symmetrisch stehn, so muss diese Linie das Polygon des Zu-

sammenfalls selbst symmetrisch theilen. — *Die Seitenzahl des ganz- oder halbregulären Ausgangspolygons darf zwölf nicht überschreiten*, weil sonst mehr als sechs Centra auf der Peripherie um M herumstehen würden, deren zwei also einen geringeren Abstand als MM_1 hätten.

Ehe zur Construction sämmtlicher unter vorstehenden Fällen 1) u. 2) enthaltenen Systeme geschritten wird, soll noch gezeigt werden, *dass das reguläre Fünfeck, sowie das ganz- oder halbreguläre Zehneck in einem unbegrenzten regelmässigen Punktsystem nicht vorkommen kann.*

Beweis. Sowohl das Fünfeck als das Zehneck fordert, nach vorstehenden Entwickelungen, die Centra $M_1, M_2, \cdots M_5$ von fünf dem anfänglichen congruenten Polygonen in gleichen Abständen auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius MM_1 um sich. Um jedes dieser fünf Polygone müssen nun, zufolge der Regelmässigkeit, wieder fünf Polygone in derselben Weise herumstehen. Eins dieser um M_1 herumstehenden fünf Polygoncentra $m_1, m_2, \cdots m_5$ muss mit M zusammenfallen, sonst würde M von einem der m einen Abstand $< MM_1$, haben, was unmöglich. Dann aber kommt das nächstfolgende der um M_1 herumstehenden Centra in kleinere Entfernung von M_2 zu stehen, als MM_1 beträgt, und das ist unerlaubt. Somit ist das Vorkommen von ganz- (resp. halb-) regulären Fünf- und Zehnecken in einem regelmässigen unbegrenzten Punktsystem ausgeschlossen; und es bleiben als mögliche Polygone nur übrig solche mit 3, 4, 6, 8, 12 Seiten. Die Systeme mit solchen Polygonen sind nun aufzusuchen.

§ 4. *Die im Fall* 1) *möglichen Systeme.* Um das ganz reguläre Ausgangspolygon von n Seiten stehn n unter einander parallele, dem ersteren congruente Polygone herum; ihre Centra theilen eine Kreislinie um M in n gleiche Theile. n darf nur die Werthe 3, 4 oder 6 haben. *Zunächst sei* $n = 3$.

Um jedes der drei das reguläre Ausgangsdreieck umstehenden Polygone müssen wieder drei reguläre Dreiecke in derselben Weise herumstehen; so um M_1. Dabei sind zwei Fälle möglich: Entweder fällt eins der M_1 umstehenden Polygoncentra in das Ausgangscentrum M, oder nicht.

a) *Im ersteren Fall* muss $\triangle M_1$ gegen $\triangle M$ dieselbe Lage haben, wie letzteres gegen ersteres, d. h. das von Punkt M nach den Ecken und

dem Centrum des Dreiecks um M_1 gezogene Bündel muss congruent oder symmetrisch sein dem von M_1 nach den Ecken und dem Centrum des Dreiecks um M gezogenen Linienbündel. Indem nun Linie MM_1 beiden Bündeln gemeinsam ist, ergiebt sich bei Congruenz der Bündel, dass beide Dreiecke parallele Seiten, aber verwendete Stellung haben; wogegen sie, bei Symmetrie der Bündel, in symmetrischer Stellung gegen einander stehn. Fährt man in beiden Fällen fort, um jedes der vorhandenen Dreiecke je drei unter einander parallele Dreiecke in derselben Weise wie vorher anzuordnen, so erhält man *zwei verschiedene regelmässige unbegrenzte Punktsysteme* Nr. I. und II. (Fig. 1 und 2). *In beiden liegen die (mit Systempunkten natürlich nicht besetzten) Mittelpunkte regulärer Dreiecke in den Knoten eines Netzes regulär sechseckiger Maschen, welches Netz in der Figur nicht gezeichnet ist; und von den sechs eine Masche umstehenden Dreiecken sind je drei abwechselnde parallel gestellt. Aber beim System* I. *haben je zwei Nachbardreiecke parallele Seiten, jedoch verwendete Stellung; beim System* II. *stehen je zwei Nachbardreiecke zu einander symmetrisch.*

Die Figuren 3 und 4 zeigen Systeme, welche Specialfälle zu den Systemen I. und II. gleichzeitig sind. Bei ersterem Specialsystem IIa. sind die zugewandten Seiten zweier symmetrisch stehenden Nachbardreiecke parallel; beim zweiten IIb. geht die Verbindungslinie der Centra zweier Nachbardreiecke durch die einander zugewandten Ecken. Wieder einen Specialfall zu Fig. 3 giebt die Fig. 5, ein System IIa′ darstellend, das aus regulären Drei-, Vier- und Sechsecken zusammengesetzt ist.

b) *Wenn von den drei um M_1 herumstehenden Dreiecken, die den drei um M herumstehenden entsprechen, keins sein Centrum in M liegen hat*, so ist die einzige Möglichkeit die, dass zwei dieser Centra (m_1 und m_2) in die Schnittpunkte der mit dem Radius MM_1 um M und um M_1 beschriebenen Kreise fallen, da man sonst stets auf zwei Centra geführt würde, deren Abstand $< MM_1$ wäre. Das dritte Centrum m_3 liegt dann auf der über M_1 hinaus um sich selbst verlängerten MM_1. (Fig. 6). Auch wird auf der über M hinaus um sich selbst verlängerten MM_1 ein Centrum μ gefordert, dessen zugehöriges Dreieck den Dreiecken um m_1 und m_2 parallel steht. Ferner werden zwischen m_3 und m_1 sowie zwischen m_3 und m_2 noch die Centra M'' und M''' gefordert, deren zugehörige Dreiecke zum

Ausgangsdreieck parallel stehn. Da nun $\triangle m_3$ gegen $\triangle M_1$ dieselbe Lage haben soll, wie $\triangle M_1$ gegen $\triangle M$, so muss das von Punkt m_3 nach $\triangle M_1$ gezogene Bündel congruent oder symmetrisch sein dem von M_1 nach $\triangle M$ gezogenen. Aber die in beiden Bündeln sich entsprechenden Linien $m_3 M_1$ und $M_1 M$ sind geradlinig an einander gesetzt. Also haben beide Bündel, im Falle sie congruent sind, Parallelstellung. Also sind auch die Dreiecke bei M und bei M_1 parallel gestellt. Dann muss auch das $\triangle$ bei m_3 zu dem bei M_1 parallel stehn; also müssen auch sowohl die Dreiecke um M_2 und M_3, als auch diejenigen um $m_1 m_2$ und um μ sämmtlich mit dem Ausgangsdreieck parallel stehn. Dies giebt ein neues System III.

Sind dagegen beide Bündel symmetrisch, so haben sie, da die entsprechenden Linien $m_3 M_1$ und $M_1 M$ geradlinig an einander gesetzt sind, dieselbe Lage, als wäre $\triangle M_1$ aus anfänglicher Parallelstellung zu $\triangle M$, um die Gerade $M M_1$ als Axe, um 180° gedreht. Jetzt betrachtet man die von Punkt M resp. M_1 nach den Dreiecken um M_1 resp. m_3 gezogenen Bündel. Diese müssen mit einander übereinstimmen. Wären sie congruent, so hätten $\triangle M_1$ und $\triangle m_3$ Parallelstellung, woraus Parallelstellung der Dreiecke M und M_1 folgen würde, die hier ausgeschlossen. Sind sie aber symmetrisch, so haben sie dieselbe Lage, als wäre $\triangle m_3$ aus anfänglicher Parallelstellung zu $\triangle M_1$ um die Gerade $M_1 m_3$ als Axe um 180° gedreht, somit wieder parallel zum Ausgangsdreieck.

Weil nun die Dreiecke m_1 und m_2 dem $\triangle m_3$ parallel stehn, und die Dreiecke M'' und M''' ebenfalls dem Ausgangsdreiecke parallel stehn, so würden auf der Peripherie um M_1 die Centra von sechs congruenten parallelstehenden Dreiecken liegen, während auf der entsprechenden Peripherie um M die Centra nicht parallel stehender Dreiecke sich befänden, indem ja $\triangle M_1$ andere Stellung als $\triangle M$ und somit als die Dreiecke m_1 und m_2 hat. Dies widerspräche aber der Regelmässigkeit.

Hiernach hat sich nur ein neues *System* III. ergeben. ***Es wird gebildet aus parallel stehenden congruenten regulären Dreiecken, deren Mittelpunkte die Knoten eines Netzes gleichseitig dreieckiger Maschen einnehmen.*** (Fig. 7).

Bemerkenswerth sind zwei Specialfälle: Beim ersten (IIIa.) sind die Dreiecksseiten, beim zweiten (IIIb.) die Dreieckshöhen den Maschenseiten parallel. (Fig. 8 und 9.)

Jetzt sei $n=4$.

Um jedes der vier parallelen das Ausgangsquadrat umstehenden und ihm congruenten Quadrate müssen wieder vier Quadrate in derselben Weise herumstehen; so z. B. um das Quadrat mit dem Centrum M_1. Eins der dieses Quadrat umstehenden muss nun mit dem Ausgangsquadrat zusammenfallen, weil sonst innerhalb des mit MM_1 als Radius um M beschriebenen Kreises noch Quadratcentra gefordert würden, die somit zu nahe an M lägen. — Das Quadrat M muss also jetzt zum Quadrat M_1 dieselbe Lage haben, wie letzteres zu ersterem, d. h. (wie bei den Dreiecken) beide stehen entweder parallel oder symmetrisch. Durch Weiterführung dieser Construction gelangt man zu *zwei neuen Systemen* IV. *und* V. (Fig. 10 und 11), *gebildet aus lauter congruenten Quadraten, deren Mittelpunkte die Knoten eines Netzes quadratischer Maschen einnehmen. Beim ersteren System sind sämmtliche Quadrate parallel; beim letzteren sind die eine Masche umstehenden abwechselnd parallel, je zwei benachbarte aber symmetrisch gestellt.*

Bemerkenswerth sind zwei Specialfälle; Beim ersten (IVa.) sind die Seiten, beim zweiten (IVb.) die Diagonalen der Quadrate den Maschenseiten parallel (Fig. 12 und 13).

Es sei $n=6$.

Um jedes der sechs parallelen, das reguläre Ausgangssechseck umstehenden und ihm congruenten Sechsecke müssen wieder sechs Sechsecke in derselben Weise herumstehen; so z. B. um dasjenige mit dem Centrum M_1. Zu den dieses umstehenden gehören nun die Sechsecke mit den Centren M und M_2, welche somit ebenfalls parallel stehen müssen. Demnach besteht *das System aus lauter parallelen congruenten regulären Sechsecken, deren Centra die Knoten eines Netzes gleichseitig dreieckiger Maschen einnehmen.*

Abgesehen von dem Grössenverhältniss der Sechsecke und Dreiecke ist dieses System dasselbe wie No. I. Von den zwei bemerkenswerthen Specialfällen, dass zwei benachbarte Sechsecke mit den Seiten, und dass sie mit den Ecken gerade gegenüberstehen, ist der erstere in Fig. 3 enthalten; den andern (Ia.) zeigt Fig. 14.

§. 5. *Die im Fall* 2a) *möglichen Systeme.* Um das ganz- oder halbreguläre $2n$-eck stehen $2n$ ihm congruente Polygone, so dass ihre Centra

eine um M beschriebene Kreislinie in abwechselnd gleiche oder auch in lauter gleiche Theile theilen. Je zwei benachbarte Aussenpolygone stehen zu einander symmetrisch in Bezug auf einen kleinen Halbmesser des Ausgangspolygons. n darf nur den Werth 2 oder 3 haben.

Zunächst sei $n = 2$.

Um jedes der vier, das Ausgangsrechteck umstehenden, ihm congruenten Polygone müssen vier neue in derselben Weise herumstehen. Man zeigt wie früher, dass im Allgemeinen eins der um M_1 stehenden Centra mit M zusammenfallen muss. Nur wenn der Abstand zweier Aussencentra gerade gleich MM_1 ist, scheint es zunächst, als wenn M nicht zu den vier M_1 umstehenden Centren m_1, m_2, m_3, m_4 zu gehören brauchte, sondern als wenn zwei von ihnen in die Schnittpunkte der mit dem Radius MM_1 um M und M_1 beschriebenen Kreise fallen könnten, so dass die Punkte m die Lage der Fig. 15 hätten, wobei m_2 in M_2 fällt. Da nun das Polygon M_2 gegen M_1 dieselbe Lage hat, wie M_1 gegen M, und da die ersteren zwei Polygone zu einander symmetrisch stehen, so müssen auch die letzteren zwei in derselben Art symmetrisch stehen. Eine Seite des ganz- oder halbregulären Vierecks bei M ist aber parallel MM_1; die entsprechende Seite des Vierecks bei M_1 müsste also parallel $m_1 M_2$ sein. Dies widerspricht aber der symmetrischen Stellung beider Polygone. Somit folgt, dass eins der um M_1 stehenden vier Centra in M fallen muss.

So lange nun zwei nächstbenachbarte Aussencentra M_1, M_2 einen von MM_1 verschiedenen Abstand haben, können sich die vier um M_1 stehenden Centra nur so anordnen, dass das von ihnen gebildete Rechteck parallel liegt zu dem von $M_1 M_2 M_3 M_4$ gebildeten, weil sonst zwei Centra näher aneinander kämen als MM_1. In diesem Fall bilden die Centra ein Netz rhombischer Maschen. Ist dagegen $M_1 M_2 = MM_1$, so kann eins der M_1 umstehenden Centra in M_2 fallen. Dann entsteht eine Anordnung der Polygoncentra nach abwechselnd regulär sechseckigen und dreieckigen Maschen, wovon Fig. 15 ein Bild giebt, wenn darin m_1 und m_3 unbesetzt, Punkt μ aber besetzt gedacht wird.

Das Polygon M muss nun zu M_1 dieselbe Lage haben, wie letzteres zu ersterem, d. h. beide stehen entweder parallel oder symmetrisch. Zu-

nächst wird die Anordnung der Centra *nach rhombischen Maschen* verfolgt. Dann müssen, bei Parallelstellung der Vierecke M und M_1, sämmtliche Vierecke parallel stehen. Dies liefert das *System* VI. (Fig. 16), *gebildet aus lauter parallelen congruenten Rechtecken (im speciellen Fall: Quadraten), deren Centra die Knoten eines Netzes rhombischer Maschen einnehmen, und deren Seiten den Maschendiagonalen parallel sind.*

Jetzt mögen die Vierecke M und M_1 symmetrisch stehen. Da ihre Seiten den Seiten der durch die herumstehenden vier Centra gebildeten Rechtecke, d. h. den Diagonalen der rhombischen Maschen, parallel laufen müssen, so ist die symmetrische Stellung nur dann möglich, wenn die Linie MM_1 mit den Richtungen der Polygon-Seiten einen halben rechten Winkel bildet, d. h. wenn die rhombische Masche eine quadratische ist. So entsteht das *System* VII. (Fig. 17), *gebildet aus congruenten Rechtecken, deren Centra die Knoten eines Netzes quadratischer Maschen einnehmen, während die vier eine Masche umstehenden Rechtecke ihre eine Seitenart abwechselnd der einen und der anderen Maschendiagonale parallel liegen haben.* Einführung von Quadraten statt der Rechtecke gäbe das frühere System (Fig. 13).

Im Falle der abwechselnd sechs- und dreieckigen Maschen ist Parallelstellung der Polygone M und M_1 unmöglich, weil diese nothwendig rhombische Maschen nach sich zieht. Es bleibt nur die symmetrische Stellung übrig; und weil von den drei eine regulär-dreieckige Masche bestimmenden Polygonen M, M_1, M_2 jedes zum andern in derselben Weise symmetrisch stehen muss, so ist die einzig mögliche Anordnung folgende: *System* VIII. (Fig. 18), *gebildet aus congruenten Rechtecken (im speciellen Fall: Quadraten), deren Centra die Knoten eines Netzes von abwechselnd regulär sechsseitigen und regulär dreiseitigen Maschen einnehmen, und deren eine Seitenart den Seiten der dreieckigen Maschen parallel ist.*

Jetzt sei $n = 3$.

Die Lage der sechs, das ganz- oder halbreguläre Ausgangssechseck umstehenden Centra ist eindeutig bestimmt. Sie müssen um MM_1 von einander abstehen und zwar auf den (zu verlängernden) grossen Halbmessern des (zu diesem Zweck als ganzregulär zu denkenden) Ausgangssechsecks liegen.

Um M_1 müssen sechs Polygone in derselben Weise herumstehen wie um M; also müssen M und M_2 zu diesen um M_1 herumstehenden gehören. Da aber je zwei benachbarte Aussenpolygone zu einander symmetrisch stehen, so müssen die Polygone M und M_2 auch symmetrisch stehen. Da ferner die Lage des Centrums M_2 gegen das Ausgangspolygon M gegeben ist, so kann man um M_2 das zu M symmetrisch stehende Sechseck unmittelbar construiren und findet diese symmetrische Stellung nicht verschieden von der Parallelstellung. Somit müssen sämmtliche Sechsecke parallel stehen. Dies liefert das *System* IX. (Fig. 19), *gebildet aus congruenten parallelen halbregulären Sechsecken, deren Centra die Knoten eines Netzes regulär dreiseitiger Maschen einnehmen, und deren Seiten den Maschenseiten parallel sind.*

Einführung von ganzregulären Sechsecken statt der halbregulären giebt das frühere System der Fig. 14.

§. 6. *Die im Fall* 2b) *möglichen Systeme.* Um das ganz- oder halbreguläre $2n$-eck stehen n ihm congruente Polygone in der Weise herum, dass die Verbindungslinien von M mit den Centren der äusseren Polygone durch die Mitten der abwechselnden Seiten des Ausgangspolygons gehn und das betreffende äussere Polygon symmetrisch theilen. Je zwei benachbarte Aussenpolygone stehen symmetrisch zu einander. n kann die Werthe 2, 3, 4, 6 haben.

Zunächst sei $n=2$.

Das äussere Viereck M_1 kann durch die Linie MM_1 auf drei Arten symmetrisch getheilt werden: Wenn es ein Quadrat ist, kann seine Diagonale mit MM_1 zusammenfallen; und wenn es ein Rechteck (oder Quadrat) ist, kann MM_1 durch die Mitte der einen oder der anderen Seitenart hindurchgehn. — Im ersten Fall würden die um M_1 herumstehenden Centra zu nahe an M fallen, so dass ein derartiges System nicht möglich ist. Als zweiten Fall nehmen wir den, wo sich das äussere und das Anfangsrechteck ungleiche Seiten zuwenden. Durch Weiterführung dieser Construction erhält man *ein System, gebildet aus congruenten Rechtecken* (*im speciellen Fall: Quadraten*), *deren Centra die Knoten eines Netzes quadratischer Maschen einnehmen, während von den vier eine Masche umstehenden Recht-*

ecken abwechselnd die längere und die kürzere Seite einer und derselben Maschenseite parallel läuft. Dies System ist indess, wenn von dem Grössenverhältniss der Rechtecke und Quadrate abgesehn wird, nicht verschieden von System V.

Es erübrigt der letzte Fall, dass die Rechtecke M und M_1 sich gleiche Seiten zuwenden. Hieraus entsteht *ein System mit lauter congruenten parallelen Rechtecken (oder Quadraten), deren Centra in gleichen Abständen auf einer unendlichen Geraden stehn, und deren eine Seitenart dieser Geraden parallel ist.* Soll nun das System nach zwei Dimensionen unendlich sein, so müssen noch ausserhalb jenes unendlichen Streifens Systempunkte existiren; dieselben müssen, zufolge der Regelmässigkeit, eben solchen Streifen angehören. Alle diese, mit Centren congruenter paralleler Rechtecke besetzten Geraden müssen parallel laufen, weil ihr Schnitt *stets* zwei Centra liefern würde, deren Abstand $< MM_1$, was unerlaubt. Natürlich folgen diese Geraden in gleichen Abständen auf einander. Zwei nächstbenachbarte dieser Geraden werden betrachtet; M und m seien zwei auf der einen und der andern Geraden liegende Centra von der Lage, dass ein kleinerer Centralabstand zwischen beiden Geraden überhaupt nicht vorkommt. Dann sind nur zwei Lagen für m möglich: Entweder fällt seine senkrechte Projection auf die andere Gerade mitten zwischen zwei Nachbarcentra, oder in ein Centrum. Denn in jedem anderen Fall würde die Regelmässigkeit fordern, dass ausser m noch drei andere Centra um M ständen, welche zusammen eine rechteckige Masche bildeten. Diese neuen Centra würden aber zu nahe an schon vorhandene zu liegen kommen.

Im ersteren der beiden möglichen Fälle entsteht ein von VI. nicht wesentlich verschiedenes System, indem jetzt nur die kleine Diagonale der rhombischen Maschen $<$ die Maschenseite sein muss, während sie dort $>$ war.

Im anderen Fall entsteht das *System* X. (Fig. 20), *gebildet aus congruenten parallelen Rechtecken (im speciellen Fall: Quadraten), deren Centra die Knoten eines Netzes mit rechteckigen Maschen einnehmen, und deren Seiten den Maschenseiten parallel sind.*

Jetzt sei $n = 3$.

Das äussere Sechseck kann durch die Linie MM_1 auf drei Arten symmetrisch getheilt werden: Wenn es ein reguläres Sechseck ist, kann einer seiner grossen Halbmesser mit MM_1 zusammenfallen; wenn es ein halb- (oder ganz-) reguläres Sechseck ist, kann MM_1 durch die Mitte der einen oder andern Seitenart hindurchgehn. Im ersteren Fall werden, bei Fortführung der Construction, Centra zu nahe an M gefordert. Im andern Fall können sich wiederum die Polygone M und M_1 gleiche oder ungleiche Seiten zuwenden. Beides liefert keine wesentlich neuen Systeme, abgesehen von dem Grössenverhältniss der auftretenden Polygone; denn man wird nur auf System VIII. und System II. geführt.

Wenn endlich $n = 4$ *oder* 6 *ist*, dürfen sich zwei Nachbarpolygone weder Ecke und Seite, noch ungleiche Seiten zuwenden, weil dadurch Centra zu nahe an M gefordert werden. Wenn sich aber je zwei benachbarte halb- oder ganzreguläre Achtecke oder desgleichen Zwölfecke gleiche Seiten zuwenden, so entstehen Systeme, die, abgesehen vom Grössenverhältniss der Polygone, nicht von den Systemen VII. und VIII. verschieden sind.

§. 7. *Die Polygone greifen nicht in einander.* Ueber die gegenseitige Lage der congruenten Polygone ist nur vorausgesetzt worden, dass sie keine Ecke gemeinsam haben. Ob sie aber ganz ausser einander liegen, (wie stets bei der Zeichnung angenommen), oder ob sie z. Th. in einander greifen, ist unerörtert geblieben. Die Unstatthaftigkeit des letzteren Falls sieht man so ein: Man vergrössere bei irgend einem der gefundenen Systeme die Polygone, während die Orte der Centra und somit die Maschen unverändert bleiben, bis zum Ineinandergreifen. Dann folgt aus der Regelmässigkeit, dass im Innern eines jeden Polygons durch die hineinfallenden Punkte ein ganz- oder halbreguläres Polygon entsteht. Diese kleineren Polygone hängen, gleich den ursprünglichen (vor der Vergrösserung) nicht mit den Ecken zusammen.

Sonach besässe das System isolirte Polygone, die kleineren Kreisen eingeschrieben wären als das Ausgangspolygon, und das war ausdrücklich ausgeschlossen. Also kann durch Vergrösserung bis zum Ineinandergreifen kein System entstehn, das von einem der gefundenen verschieden wäre.

§. 8. *Resultat dieses Capitels.* Es giebt zehn wesentlich verschiedene

unbegrenzte regelmässige Punktsysteme mit ganz- oder halbregulären isolirten Polygonen, in vier Gruppen zusammenfassbar:

1. Systeme mit gleichseitigen Dreiecken, welche entweder parallel und mit ihren Centren in den Knoten regulär dreiseitiger Maschen (System III.), oder parallelseitig aber verwendet (I.), oder symmetrisch (II.) in den Knoten regulär sechsseitiger Maschen liegen.

2. Systeme mit Quadraten, welche parallel (IV.) oder symmetrisch (V.) in den Knoten quadratischer Maschen liegen.

3. Systeme mit Rechtecken (oder Quadraten), welche parallel in den Knoten rhombischer Maschen, mit den Seiten den Maschendiagonalen parallel (VI.) liegen; oder parallel in den Knoten rechteckiger Maschen, mit den Seiten den Maschenseiten parallel (X.); oder in den Knoten quadratischer Maschen, mit den Seiten abwechselnd den Maschendiagonalen parallel (VII.); oder in den Knoten von abwechselnden regulär sechs- und dreiseitigen Maschen, mit der einen Seitenart den Seiten der dreieckigen Maschen parallel. (VIII.)

4. Systeme mit halbregulären parallelen Sechsecken, die in den Knoten gleichseitig dreieckiger Maschen liegen, mit den Seiten den Maschenseiten parallel. (IX.)

Durch besondere Annahmen über das Grössenverhältniss von Polygonen und Maschen, sowie, wo noch Unbestimmtheit vorhanden war, über die Neigung der Polygon- gegen die Maschenseiten und über die Maschenwinkel, ergeben sich zahlreiche Specialfälle.

Capitel II.

Anfang der systematischen Aufsuchung aller regelmässigen Punktsysteme. Hülfssätze.

§. 9. *Das Elementardreieck.* A sei ein Punkt eines unbegrenzten regelmässigen Punktsystems. Ist der kleinste überhaupt vorkommende Abstand zweier Systempunkte $= c$, so muss sich zufolge der Regelmässigkeit ein Punkt B vorfinden, so gelegen, dass $AB = c$. Ferner sei C ein Systempunkt, so gelegen, dass er unter allen, die Punkte A, B und einen dritten Systempunkt zu Ecken habenden Dreiecken ein Dreieck kleinsten Umfangs bestimmt. Es ist nicht undenkbar, dass ein anderer Systempunkt D existirt,

so gelegen, dass $AD = c$, und dass über dieser Linie auf die vorige Art ein Dreieck noch kleineren Umfangs construirt werden kann. Dann soll letzteres gewählt werden; es heisse ein Elementardreieck. *Das Elementardreieck ist also durch drei Eigenschaften definirt:*

1. *Seine Ecken sind Systempunkte.*

2. *Mindestens eine seiner Seiten ist gleich dem kleinsten Punktabstand c.*

3. *Unter allen, den vorigen zwei Bedingungen genügenden Dreiecken hat es den kleinsten Umfang.*

Wenn etwa mehrere Arten von Elementardreiecken existirten, so wird irgend eine derselben der folgenden Construction zu Grunde gelegt. Die Seiten des Elementardreiecks (*Elementarlinien*) seien a, b, c, die gegenüberliegenden Ecken A, B, C, die dortigen Winkel α, β, γ. Diese Winkel mit den ihnen im Elementardreieck zukommenden Schenkellängen heissen *Elementarwinkel.* Zunächst wird das Elementardreieck stets von ungleichen Seiten vorausgesetzt; dann sei $a > b > c$, also $\alpha > \beta > \gamma$.

Die Regelmässigkeit fordert, dass sich bei dem Punkt A als Scheitel jeder der drei Elementarwinkel vorfindet. Also gehn von A als gemeinsamer Ecke drei Elementardreiecke aus, welche entweder sämmtlich congruent sind, oder deren eines symmetrisch zu den beiden anderen ist. Dasjenige von ihnen, welches den $\sphericalangle\alpha$ bei A liegen hat, heisse $\triangle$; die andern, welche $\sphericalangle\beta$ und $\sphericalangle\gamma$ in A liegen haben, heissen resp. $\triangle'$ und $\triangle''$. Die Ecken dieser letzteren werden analog wie die von $\triangle$, jedoch ein- oder zweimal gestrichelt, bezeichnet. Zur Gewinnung fester Vorstellungen wird $\triangle$ stets so liegend gedacht, dass c von A aus horizontal nach rechts verläuft und C oberhalb liegt.

Innerhalb eines jeden der beiden Hauptfälle (dass nämlich alle drei Dreiecke congruent, oder eines symmetrisch zu den anderen) sind wieder die Fälle zu unterscheiden, wo drei oder zwei der Dreiecke aneinander oder theilweise auf einander, oder wo alle frei liegen. Ferner sind jedesmal die Fälle des spitz-, stumpf- und rechtwinkligen Elementardreiecks zu untersuchen.

§. 10. *Hülfssätze.*

Satz 1. *Im Innern der Ellipse, welche durch C geht und A, B zu Brennpunkten hat, (Elementarellipse) kann kein anderer Punkt des Systems liegen.*

Beweis: Diese Ellipse ist der geometrische Ort der Spitzen aller über der Grundlinie c stehenden Dreiecke kleinsten Umfangs $a+b+c$ und jeder Punkt innerhalb derselben würde ein über c stehendes Dreieck kleineren Umfangs bestimmen, was unmöglich.

Folgerungen: a. *Das Elementardreieck ist auf Fläche und Seiten frei von Systempunkten.*

b. *Zwei Elementardreiecke können nicht so liegen, dass zwei Seiten verschiedener Länge auf einander fallen.* Denn sonst trüge eine Seite des einen von ihnen einen Systempunkt.

Satz 2. *Der kleinste Winkel, den die von einem Punkt auslaufenden Elementarlinien a und b einschliessen können, ist γ, der kleinste zwischen b und c ist α, der kleinste zwischen c und a ist β. Ebenso ist der Winkel zwischen c und $c > \alpha$, derjenige zwischen b und $b > \gamma$.*

Beweis. 1. Schlössen die von einem Punkt auslaufenden a und b einen Winkel ein $< \gamma$, so wäre seine Gegenseite $< c$, was unmöglich, da c der kleinste Punktabstand des ganzen Systems ist.

2. Schlössen die von einem Punkt auslaufenden b und c einen $\measuredangle < \alpha$ ein, so wäre seine Gegenseite $< a$. Dieses die Seite c enthaltende Dreieck hätte also einen Umfang $< a+b+c$, was unmöglich.

3. Analog folgt, dass zwischen c und a kein kleinerer $\measuredangle$ als β liegen kann.

4. Wäre der Winkel zweier von einem Punkt auslaufender c gleich α, so brauchte man das hierdurch bestimmte Dreieck, dessen dritte Seite a' heisse, nur so auf das Elementardreieck zu legen, dass die gleichen Stücke auf einander fielen, um zu sehen, dass $a' < a$ sein muss. Dies die Seite c enthaltende Dreieck hätte also einen Umfang $< a+b+c$, was unerlaubt. — Dies gilt um so mehr, wenn der Winkel zwischen beiden c $< \alpha$ ist.

5. Wäre der Winkel zwischen zwei b gleich γ, so wäre die Gegenseite $< c$, was unmöglich. Dies gilt um so mehr, wenn der Winkel $< \gamma$ ist.

Satz 3. *Dass zwei einen Eckpunkt gemeinsam habende Elementardreiecke theilweise auf einander fallen, ist unmöglich für das spitzwinklige Elementardreieck; für das stumpfwinklige und rechtwinklige ist es zweifach*

möglich, nämlich so, dass beide die Seite b oder c gemein haben und symmetrisch zu einander liegen.

Beweis in drei Theilen:

1. Zunächst wird versucht, bei C den Elementarwinkel α des zweiten Dreiecks irgend wie auf das erste zu legen.

a) Das Elementardreieck sei spitzwinklig ($\alpha < 1R$).

Man lege durch C die Gerade $MCN \| AB$; dann kann, nach den vorigen zwei Sätzen, von C aus keine Elementarlinie c in denjenigen durch MN begrenzten Theil der Ebene verlaufen, in welchem das erste Elementardreieck liegt, sondern sie kann höchstens in die Gerade MN selbst fallen, nach der einen oder andern Richtung von C aus. Man mache jetzt $CD = CE = c$ (Fig. 21), und lege den Elementarwinkel α, der ja die Schenkel b und c hat, mit seinem Schenkel c in CD oder in CE, so dass b nach *der* Seite von MN hin verläuft, wo das Dreieck liegt. In CD angelegt bleibt dieser Elementarwinkel ganz ausserhalb des Dreiecks ABC, indem beide gerade in anstossende Lage kommen. In CE angelegt, würde α seinen Schenkel b ganz im Innern des Dreiecks haben, da $\alpha > \beta$, aber $< \beta + \gamma$ ist. So würde ein Systempunkt in das Elementardreieck fallen, und das ist unmöglich.

Verändert man nun die Lage des Elementarwinkels α durch Drehung um C, so ist dies nur so möglich, dass c in den freien Theil der Ebene jenseits MN verläuft. Hierbei erhält man jedenfalls so lange unmögliche Lagen, als der Schenkel b noch in das Dreieck ABC hineinragt; verläuft er aber ausserhalb, so liegen beide Dreiecke gänzlich ausser einander. So erkennt man, dass, von gemeinsamem Scheitel aus, der Elementarwinkel α überhaupt nicht auf γ fallen kann,— und ebensowenig γ auf α.

b) Das Elementardreieck sei recht- oder stumpfwinklig ($\alpha \geqq 1R$).

Man lege von C aus den $\sphericalangle\alpha$ beiderseits an CA an, so bilden die beiden freien Schenkel den $\sphericalangle DCE$ (Fig. 22). Nach den vorigen Sätzen darf nun von C aus keine Elementarlinie c in den convexen Winkelraum DCE verlaufen, sondern nur in den concaven oder in seine Schenkel. Bei Anlegung an CD bleibt der Elementarwinkel α ganz ausserhalb des Dreiecks; bei Anlegung an CE fällt sein Schenkel b in CA. *Dies*

ist eine mögliche Lage, bei der beide Dreiecke theilweise auf einander fallen. Sie liegen symmetrisch und haben b gemein. Bei Drehung des Elementarwinkels α um C, so dass c in den concaven Winkel DCE ragt, ergeben sich jedenfalls so lange unmögliche Lagen (weil der Endpunkt von b einen Systempunkt im $\triangle ABC$ liefert), bis beide Dreiecke überhaupt nicht mehr auf einander fallen.

2. Verfährt man, um den Elementarwinkel β des zweiten Dreiecks von C aus auf das erste zu legen, genau so wie vorher, so ergiebt sich gar keine Möglichkeit des theilweisen Aufeinanderfallens beider Dreiecke. Ebensowenig wie β auf γ darf dann natürlich γ auf β fallen.

3. Jetzt wird versucht, bei A den Elementarwinkel β des zweiten Dreiecks auf das erste zu legen. Man ziehe (Fig. 21) von A aus zwei Linien, $AF = AG = c$ so, dass $\sphericalangle FAC = GAB = \alpha$. Dann kann c von A aus nicht anders in den convexen Winkel FAG hineinragen, als indem es auf AB fällt. Legt man den Elementarwinkel β an AF oder AG an, so bleibt er ganz ausserhalb des Dreiecks ABC. Die einzige Art, ihn auf dies Dreieck fallen zu lassen, ist, wenn sein Schenkel c auf AB fällt, so dass $BAC' = \beta$. Solange nun $\alpha < 1R$, ist dies unmöglich, weil $CC' < c$ sein würde. *Für $\alpha \geqq 1R$ ist dies aber eine mögliche Lage des theilweisen Aufeinanderfallens beider Dreiecke. Sie liegen symmetrisch und haben c gemein.* Natürlich ist für das Aufeinanderfallen von α auf β dieselbe Lage die einzig mögliche.

Hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft, zwei Elementarwinkel von gemeinsamem Scheitel aus einander zu legen.

Satz 4. *In einem System mit stumpf- oder rechtwinkligem Elementardreieck kann die kürzeste Elementarlinie von einem Systempunkt höchstens zweimal auslaufen.*

Beweis. (Fig. 22). Trägt man in A den Winkel α an AC nach aussen an, $= FAC$, und an AB einen ganz wenig grösseren Winkel als α, $= GAB$, so kann in den convexen Winkelraum FAG von A aus kein c verlaufen, ausser auf AB fallend; und in den concaven Winkel FAG (oder in seine Schenkel) darf auch nur *ein* c fallen, weil dieser Winkel $< \alpha$ ist, und (nach Satz 2) der Winkel zweier $c > \alpha$ sein muss. Also laufen von A überhaupt höchstens zwei c aus.

Zusatz. Ist das stumpfwinklige Elementardreieck gleichschenklig ($b = c$), so dürfen von A drei C auslaufen.

Satz 5. *In einem System mit stumpfwinkligem Elementardreieck kann ein und derselbe Punkt nur in der Art Scheitel für zwei Elementarwinkel α zugleich sein, dass beide symmetrisch sind.*

Beweis. Wenn beide congruent wären, müssten um den Punkt A vier α herumliegen (Satz 1 und 2), was unmöglich ist.

Zusatz. *Ist das Elementardreieck rechtwinklig, so können auch zwei congruente Elementarwinkel α die Scheitel in demselben Punkt haben, nämlich indem sie als Scheitelwinkel liegen.*

Capitel III.

Aufsuchung aller Systeme, in denen drei congruente ungleichseitige Elementardreiecke mit verschiedenen Winkeln bei demselben Punkt liegen.

§. 11. Hier sind drei Fälle möglich, die nach einander zu behandeln sind:

1. Alle drei Dreiecke liegen aneinander, indem zwei gleiche Seiten zweier benachbarten zusammenfallen.

2. Nur zwei Dreiecke aneinander, das dritte getrennt.

3. Alle drei Dreiecke getrennt.

Theilweises Aufeinanderfallen *dieser* drei Dreiecke ist, da sie congruent sind, ausgeschlossen. (Satz 3).

§. 12. *Erster Fall: alle drei Dreiecke aneinander.*

Dies ist — abgesehn vom stumpfwinkligen Elementardreieck — in dreifacher Art möglich, nämlich in der Reihenfolge $\triangle\triangle'\triangle''$ oder $\triangle'\triangle''\triangle$ oder $\triangle''\triangle\triangle'$ (Fig. 23, 24, 25); für das stumpfwinklige Dreieck nur in der dritten Reihenfolge. (Satz 1).

a) *Reihenfolge* $\triangle\triangle'\triangle''$ (Fig. 23). Zwei geradlinig aneinander gesetzte Elementarlinien b, wie bei A, müssen sich bei jedem Punkt des Systems finden: so bei B. Zieht man nun durch B eine Parallele zu AC, so darf von B aus kein b in denjenigen durch diese Parallele begrenzten Theil der Ebene, in welchem die drei Dreiecke liegen, hineinlaufen (Satz 2); also kann der geradlinige Zug bb bei B nicht anders vorkommen, als indem das schon vorhandene $b = CB$ über B hinaus um b verlängert wird.

Ebenso muss $AC = b$ über B hinaus um b verlängert werden; u. s. f. *Folglich sind die Punkte dieses Systems auf jeder von zwei unendlichen Parallelen in gleichen Abständen b angeordnet; und andere als diese Punkte dürfen auf oder zwischen den Parallelen nicht vorkommen.*

b) *Reihenfolge* △ △' △ (Fig. 24). *Man findet ebenso, dass die Punkte auf zwei unendlichen Parallelen in den Abständen c angeordnet sein müssen.*

c) *Reihenfolge* △' △ △' (Fig. 25). Für das spitzwinklige Elementardreieck findet man ebenso zwei unendliche, in den Abständen a mit Punkten besetzte Parallelen.

Dasselbe gilt auch natürlich für das *recht-* und *stumpfwinklige* Elementardreieck; jedoch zunächst nicht als einzig mögliche Anordnung. Denn jetzt kann a von B aus auch in das Dreieck △' hineinragen.

Ein dem von A auslaufenden Linienbündel entsprechendes von B ausgehn zu lassen, so dass a in △' ragt, ist zweifach möglich: entweder liegt es symmetrisch zum ersteren, so dass c in sich selbst fällt (Fig. 25); oder es ist zwar symmetrisch zum ersteren, liegt aber so, dass b in BC fällt (Fig. 26).

Im ersteren Fall werden die Systempunkte E, F, G gefordert. Da jetzt (ausser wenn $a = 1R$) von A und somit von jedem Systempunkt, nur ein c auslaufen kann (Satz 2), so müssen sich, sowohl in C als in F, an die dortigen c je zwei Elementarwinkel ϵ anlegen, ganz wie in A. Dies führt auf die Punkte H und I, deren Abstand $= c$. Dem bei C vorhandenen Linienbündel muss ein eben solches bei B entsprechen, so dass c auf BA fällt. Dies führt unter allen Umständen auf Punkt D, welcher so liegt, dass die geradlinige Verlängerung von CB über B hinaus um a ihn trifft. Folglich geht auch *jetzt* durch B der geradlinige Zug bb demselben bei A, gerade wie beim spitzwinkligen Elementardreieck. Durch Fortführung der Construction entsteht ein unbegrenztes System. — Beim rechtwinkligen Elementardreieck wird man zu einer Anordnung nach lauter anstossenden congruenten Rechtecken geführt, welche die ganze Ebene erfüllen, so dass auch hier der Punkt D vorkommt.

Im andern Fall (Fig. 26) stossen in B zwei Elementarwinkel α mit dem Schenkel b aneinander. Da nun nicht mehr als zwei c von einem



Punkt ausgehen können (Satz 4), so muss Linie CF in C' einem der beiden c bei B entsprechen. Also wird von hier aus $CD = c$ gefordert; so dass also auch jetzt der Punkt D, wie im vorigen Fall, als Systempunkt existiren muss. Durch Fortführung der Construction entsteht ein unbegrenztes System.

Also unter allen Umständen fordert das Vorhandensein dreier aneinanderliegender Elementardreiecke die Existenz eines unendlichen Streifens, dessen parallele Grenzlinien mit Systempunkten in gleichen Abständen a oder b oder c besetzt sind. Für $\alpha \gtreqq 1R$ sind zwei Systeme gefunden, die als Specialfälle der folgenden allgemeinen Anordnung erkannt werden.

§. 13. *Fortsetzung des ersten Falls.*

Soll das System nach zwei Dimensionen unbegrenzt sein, so muss es ausserhalb des unendlichen Streifens noch Punkte besitzen. Unter ihnen sei P ein solcher, dass kein anderer näher als er an einer der Grenzlinien des Streifens liege. Von den Punkten dieser Grenzlinie seien A und B die beiden nächsten an P (Fig. 27). Welche Seite des Elementardreiecks nun auch den wiederkehrenden Abstand der Punkte der Grenzlinie bilden mag, so darf doch stets angenommen werden, dass diese Elementarlinie von jedem Systempunkt nur nach zwei gerade entgegengesetzten Richtungen verläuft, nämlich nach den in die Grenzlinie fallenden; denn die speciellen Fälle, wo sie nach zwei anderen entgegengesetzten Richtungen verläuft, sind bereits im vorigen §. erledigt und haben auf unbegrenzte Systeme geführt. Schliesst man nun vorläufig Systeme mit rechtwinkligem Elementardreieck aus, so kann ein dem von A ausgehenden Linienbündel entsprechendes nur in *einer* Lage bei B vorkommen, und fordert dann einen Punkt Q, so gelegen, dass $PQ =$ und $// AB$. So folgt, dass P einem zum Ausgangsstreifen parallelen und mit ihm übereinstimmenden Streifen angehören muss. — Dass dies auch für Systeme mit rechtwinkligem Elementardreieck gilt, ist noch zu beweisen; denn hier kann das bei B liegende Bündel demjenigen bei A in zweifacher Art entsprechend angelegt werden. Wäre hier der durch P gehende, dem anfänglichen congruente Streifen ihm nicht //, so müssten sie durch einander hindurchgehn.

Dies kann nun nicht so geschehn, dass beide einen Systempunkt gemein hätten; weil von diesem ja der Punkt-Abstand der Grenzlinie nach vier Richtungen ausgehn würde. Dass beide Streifen aber auch nicht auf

andere Art sich durchschneiden können, folgt auf demselben Wege, auf dem in §. 21 Cap. IV. die Unmöglichkeit des Durcheinandergehns alternirend besetzter Streifen nachgewiesen werden wird. Die dortigen Betrachtungen passen auf den vorliegenden Fall, sobald $\alpha = 1R$ gesetzt wird. — Der durch P gehende Streifen muss also dem anfänglichen parallel sein.

Im Allgemeinen wird die Forderung der Regelmässigkeit nur dann erfüllt, wenn der durch P gehende Streifen dem durch A gehenden congruent ist. Wie der zweite gegen den ersten, muss nun ein dritter gegen den zweiten liegen, u. s. f.

So ist ein *regelmässiges unbegrenztes System* gefunden, XI. (Fig. 27), *bestehend aus lauter congruenten, parallelen, unendlichen Streifen, welche in gleichen Abständen von einander stehn, gleich viel und in demselben Sinne gegeneinander verschoben sind, und auf ihren beiden Grenzlinien Systempunkte in gleichen Abständen tragen.* Dies ist das von *Wiener* auf ganz anderem Wege gefundene System.

Es hat unter Anderem folgende bemerkenswerthe Specialfälle:

a) Wenn der Abstand zweier Streifen gleich der Streifenbreite und AP die geradlinige Fortsetzung von CA ist, entsteht *das allgemeine parallelogrammatische Netz, welches Bravais seinen krystallographischen Betrachtungen zu Grunde gelegt hat.* (Fig. 28).

b) Abstand zweier Streifen gleich der Streifenbreite, aber AP symmetrisch gelegen zu AC in Bezug auf die Streifengrenze AB. (Fig. 29).

c) $PA = AC = CB$, $\sphericalangle PAB = 1R$, $\sphericalangle ACB = \frac{4}{3}R$ giebt das System lückenlos an einander geschlossener regulärer Sechsecke (Fig. 30). Dies System gehört eigentlich erst in Cap. V, da sein Elementardreieck gleichschenklig.

d) und e). Die Systeme des vorigen § (Fig. 25 und 26), welche durch zwei aufeinander senkrechte Richtungen symmetrisch theilbar sind.

In zwei Fällen kann der durch P gehende, dem anfänglichen parallele Streifen, statt congruent, symmetrisch zu ihm sein.

Erstens wenn die senkrechte Projection von P auf die nächste Grenzlinie des Ausgangsstreifens *in einen Systempunkt* und zweitens, wenn *sie mitten zwischen zwei Systempunkte* fällt. Legt man im ersteren Fall den zweiten Streifen // und symmetrisch zum ersten, so muss der dritte

symmetrisch zum zweiten, also congruent zum ersten sein, u. s. f. Das so entstandene *System* XII. (Fig. 31) *besteht aus gleich weit von einander stehenden, parallelen, unendlichen, auf beiden parallelen Grenzlinien äquidistant mit Punkten besetzten Streifen, von denen je zwei benachbarte symmetrisch zu einander stehen.*

Legt man im zweiten Fall einen zum ersten Streifen symmetrischen und parallelen durch P, so muss ein dritter Streifen existiren, der zum zweiten so liegt, wie dieser zum ersten, der also dem ersten wieder congruent ist, u. s. f. So entsteht *System* XIII. (Fig. 32), *gebildet aus gleichweit von einander stehenden, unendlichen, abwechselnd symmetrischen, auf den parallelen Grenzlinien in gleichen Abständen Punkte tragenden Streifen, welche so gegeneinander verschoben sind, dass die senkrechten Projectionen der Punkte einer Grenzlinie auf die nächste Grenzlinie des Nachbarstreifens mitten zwischen zwei dortige Punkte fallen.*

§. 14. *Zweiter Fall: Zwei Dreiecke aneinander, das dritte getrennt.* Drei Lagen sind möglich:

a. $\triangle$ und $\triangle'$ mit c aneinander, $\triangle''$ frei (Fig. 33),
b. $\triangle'$ „ $\triangle''$ „ a „ $\triangle$ „ („ 34),
c. $\triangle''$ „ $\triangle$ „ b „ $\triangle'$ „ („ 35).

Jedoch beim stumpfwinkligen Elementardreieck ist die zweite Lage unmöglich (Satz 1).

Es können zwei Fälle stattfinden: Entweder liegt nur ein Elementarwinkel α mit seinem Scheitel in jedem Systempunkt; oder er kommt mehrmals vor. *Zunächst wird der erste Fall angenommen.*

Lage a. (Fig. 33). So wie die Elementarwinkel β und γ beim Punkte A gegen α liegen, müssen sich entsprechende bei A'' finden. Sie gehören zwei neuen Elementardreiecken an, und das in jedem von diesen liegende α fordert wieder ein β und γ, so wie am Punkte A, neben sich. So fortschliessend erkennt man, dass sich lauter Elementarlinien a als Sehnen eines Kreises aneinanderschliessen müssen, an denen die Elementardreiecke nach aussen hin liegen; und andererseits von demselben Punkte A aus lauter Elementarlinien b als Sehnen eines anderen Kreises, an denen ebenfalls Elementardreiecke nach aussen hin liegen. Man zeigt leicht, *dass beide Arten aneinandergereihter Sehnen sich zu gewöhnlichen regulären*

Polygonen schliessen müssen; (auch nicht etwa zu Sternpolygonen). Zu dem Zweck ist nur nachzuweisen, dass auf dem kleineren der zwei Peripherietheile, die durch eine Sehne a (resp. b) gebildet werden, kein Punkt des Systems liegen kann. Ueber der Sehne a liegt (Fig. 36) das Elementardreieck BCA nach dem kleineren Kreisabschnitt hin. Seine Ecke A liege zunächst ausserhalb (oder gerade auf) der Peripherie. Auf dem in das Dreieck fallenden Theil der Peripherie kann kein Systempunkt liegen (Satz 1); ebensowenig auf dem bei B benachbarten Theil der Peripherie ausserhalb des Dreiecks, weil ein solcher Punkt von B um $< c$ abstehen würde. Läge endlich ein Systempunkt P auf dem bei C benachbarten Peripherietheil, so folgt aus stumpfwinkligen Dreiecken, dass $PB < a$, $PA < b$, folglich $\triangle PAB$ von kleinerem Umfange als $a + b + c$, und dabei Seite c enthaltend, also unmöglich.

Liegt die dritte Ecke des Elementardreiecks innerhalb jenes Kreises, in A', so ist wieder $PB < a$. Um aber jetzt zu erkennen, dass auch $PA' < CA'$ sein muss, beschreibe man mit CA' als Radius einen Kreis um A'. Selbst im ungünstigsten Falle, dass die zwei Abschnitte des anfänglichen Kreises beinahe gleich sind, und dass A' fast im Mittelpunkte desselben liegt, schneidet der um A' beschriebene Kreis den anfänglichen, ausser in C, in einem Punkte des grösseren Peripherieabschnitts, so dass alle Punkte des kleineren, und somit auch P, in sein Inneres fallen, also von A' um $< CA'$ abstehen. — Folglich würde Punkt P als Systempunkt wieder ein Dreieck mit Seite c und von zu kleinem Umfang bestimmen, darf also nicht existiren.

Ganz analog folgt, dass die Sehnen b (und noch einfacher, dass die Sehnen c) sich zu einem regulären Polygon schliessen müssen.

Führt man dieselben Betrachtungen für die zwei anderen *Lagen* b. *und* c. der drei Elementardreiecke durch, so erkennt man, dass zwei mit den Ecken in A zusammenstossende reguläre Polygone mit verschiedenen Seiten gefordert werden, auf deren umschriebenen Kreisen keine anderen Systempunkte stehen. Jedes von ihnen ist also ein isolirtes reguläres Polygon, das die Bedingungen des Cap. I. erfüllt. Also können hier nur solche Systeme hervorgehen, die dort bereits gefunden sind, so dass es unnöthig ist, weiter auf ihre Aufsuchung einzugehen. Wollte man es aber doch thun,

so müsste man beachten, dass die in A zusammenstossenden Winkel beider Polygone $2R$ betragen müssen. Hat nun das eine m, das andere n Seiten, so folgt dass

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$$

sein muss, und hieraus folgt wieder, dass nur entweder ein reguläres Sechs- und ein Dreieck, oder zwei verschiedene Quadrate in A zusammenstossen können, während zwischen ihnen zwei congruente Parallelogramme, je aus zwei aneinanderliegenden Elementardreiecken gebildet, liegen. Die Construction der Systeme für beide Fälle liefert System I und IV.

§. 15. *Zweiter Fall. Fortsetzung.* Wenn der Elementarwinkel α mehr als ein Mal mit dem Scheitel in einem Systempunkt liegt, kann man nicht wie im vorigen Paragraphen auf die Existenz regulärer Polygone schliessen. — Ein zweites α könnte bei A in zweifacher Art vorkommen: Entweder in den Lücken *zwischen* den drei Elementardreiecken; oder, bei $\alpha \geqq 1R$, theilweise *auf* jenen Elementardreiecken. Zunächst wird die erstere Möglichkeit untersucht, und zwar für Lage a. (Fig. 33). Versucht man den Elementarwinkel α mit dem Scheitel in A zwischen die Dreiecke $\triangle'$ und $\triangle''$ hineinzulegen, so werden durch Satz 2. mehr als $4R$ um A herum gefordert, was unmöglich. — Legt man aber denselben Winkel in den Raum zwischen $\triangle$ und $\triangle''$, und zwar an eine der dortigen Seiten b an, so bleibt für den Winkel $B''AC'$ zwischen $\triangle'$ und $\triangle''$ weniger als γ übrig. Somit kommt sowohl β als γ bei A nur ein Mal vor, also bei jedem Systempunkt nur ein Mal. Also muss sich zu dem in B'' liegenden $\sphericalangle\beta$, ein $\sphericalangle\gamma$ ebenso liegend finden, wie bei A. Die Schenkel a der Dreiecke $\triangle'$, $\triangle''$ und des eben construirten Winkels γ liegen als aneinandergereihte Sehnen in einem Kreise. Da aber ihr Winkel $<\gamma$, folglich $<60^0$ ist, so würde hierdurch auf dem kleineren der zwei durch Sehne a bestimmten Peripherietheile ein Systempunkt gefordert werden, was im vorigen Paragraphen als unmöglich bewiesen.

Legt man endlich Winkel α in denselben Winkelraum wie vorher, aber an keines der beiden Dreiecke *an*, so werden wieder mehr als $4R$ um A herum gefordert. — Analoge Betrachtungen gelten für die Lagen b. und c. (Fig. 34 und 35). Also kann der Elementarwinkel α nicht ein

zweites Mal bei A vorkommen, indem er zwischen den dortigen drei Dreiecken liegt.

§. 16. *Zweiter Fall. Fortsetzung.* Jetzt wird untersucht, ob für $\alpha \gtreqq 1 R$, ein zweiter Elementarwinkel α bei A liegen kann, indem er *auf* eine der dortigen Dreiecke fällt. Sein zugehöriges Elementardreieck heisse δ. Dann ist das Vorkommen von δ nur auf folgende Weisen möglich (Satz 3): Bei Lage a. oder c. haben α) *entweder* $\triangle'$ und δ die Seite c gemein und liegen symmetrisch aufeinander; β) *oder* $\triangle''$ und δ haben b gemein und liegen symmetrisch aufeinander; γ) *oder* beides findet zugleich statt; dies letztere kann, wenn $\alpha = 1 R$, auch bei Lage b. eintreten.

Lage a, α). Gegeben sind die stumpfwinkligen Elementardreiecke $\triangle \triangle' \triangle'' \delta$ in der gegenseitigen Lage der Fig. 37. Von A kann ausser AB kein weiteres c ausgehen. (Satz 2). Sowie in A zwei α an dem gemeinsamen Schenkel c liegen, muss es in jedem Systempunkt sein, z. B. in A'' und B'', wodurch die Punkte E und F gefordert werden. Punkt F muss (abgesehen von dem nachher zu betrachtenden Specialfall, dass F in D fällt) auf derselben Seite von AD liegen, auf der $\triangle''$ liegt, weil sonst entweder F in die Elementarellipse über AB, oder D in die Elementarellipse über $A''B''$ fiele. In A'' muss nun der Scheitel eines Winkels γ sein, der entsprechend liegt, wie $\triangle''$ in A. Dies ist zweifach möglich, je nachdem man annimmt, dass Winkel $B''A''A$ oder $B''A''E$ dem $\sphericalangle\, \alpha$ des Dreiecks $\triangle$ entspricht.

Erstere Annahme käme auf dasselbe hinaus, als läge bei jedem Punkt nur *ein* α, sie kann also auf nichts Neues führen. Also wird die zweite Annahme gemacht; dann ist das Dreieck $A''GH$ so zu legen, dass Winkel $EAG = CAA''$, also $GA'' \parallel AD$ und $GH \parallel AB$.

Nun bestimmen die Punkte $CAA''G$ ein Viereck mit drei gleichen Seiten b, deren erste und dritte von den Enden der zweiten her convergiren, so dass die vierte Seite CG jedenfalls $< b$ ist. Solange nun $A''G$ die AC nicht schneidet, hat das die Seite c enthaltende Dreieck GHC bei G einen Winkel $< \alpha$ und dabei Seite $CG < b$, also kleineren Umfang als das Elementardreieck, was unmöglich.

Schneiden sich aber beide Linien, so kommt entweder G in's Innere der Elementarellipse über AB, oder C in's Innere der entsprechenden über GH. Somit ist auf diese Art kein regelmässiges System möglich.

Nur in dem Falle, dass H in C fällt, entsteht kein Widerspruch. Dies ist zugleich der vorhin zurückgestellte Specialfall, bei dem F in D fällt. Jetzt bestimmen die Punkte $GCABC'$ drei aneinanderliegende Elementardreiecke, welcher Fall schon früher behandelt ist. Durch Fortführung dieser Construction gelangt man zu einem Specialfall des im §. 13. gefundenen Systems XIII.

Für $\alpha = 1\,R$ sind die Dreiecke $\triangle\,\triangle'$ und ADC' (Fig. 37) drei aneinanderliegende Elementardreiecke. Dieser schon früher behandelte Fall kann also nichts Neues liefern.

Lage a, β). Gegeben sind die stumpfwinkligen Elementardreiecke $\triangle\,\triangle'\,\triangle''\,\delta$ in der gegenseitigen Lage der Figur 38. Von jedem Systempunkt müssen zwei und nur zwei (Satz 4) Elementarlinien c auslaufen, in der Art wie bei A. Die zweite von B ausgehende c kann nur die Lage BE haben, $//\,DA$ (Satz 1 und 2). In D und in E muss sich unter demselben Winkel wieder je ein c anschliessen. Wenn dies in D die Lage DF hat, muss es in E die Lage EG haben (zufolge der Regelmässigkeit), und es entsteht ein unendlicher wellenförmiger Zug von Elementarlinien c. Wenn aber von D aus $c\,//\,BA$ verläuft, $= DH$, muss auch $EI\,//\,AB$ sein, und es entsteht ein unendlicher treppenförmiger Zug von Linien c. Durch jeden anderen Punkt des Systems muss nun ein ebensolcher Zug gehen, z. B. durch A''. Da nun $A''B'' = c$ keiner der Richtungen $//$ sein kann, die dem Zuge DAB angehören, so müssen beide unendlichen Linienzüge convergiren, also irgendwo sich durchschneiden.

Würde dieser Schnitt so erfolgen, dass beide einen Systempunkt gemein hätten, so gingen von diesem mindestens drei c aus, was unmöglich ist. Würde aber ein c des einen Zuges ein c des andern schneiden, so hätten jedenfalls zwei Systempunkte einen Abstand $< c$, was wieder unmöglich. Also wird man stets auf Widersprüche geführt.

Ist aber $\alpha = 1\,R$, so ist (Fig. 38) $A''B''\,//\,AD$, so dass beide Züge sich nicht schneiden. Nun muss aber auch durch C ein solcher Zug gehen. Dass dieser gegen die vorigen convergirt, ist unmöglich. Aber er kann ihnen auch nicht $//$ sein, sonst müsste er durch $\triangle''$ und δ hindurch, wobei stets ein Systempunkt auf Fläche oder Seite des einen dieser Dreiecke fallen würde, was unmöglich (Satz 1, a).

Somit wird man auf kein regelmässiges System geführt.

Lage a, γ). Dreieck δ liegt theilweise auf $\triangle'$ und auf $\triangle''$, zu beiden symmetrisch, und hat mit ersterem c, mit letzterem b gemein (Fig. 39). Wäre $\alpha = 1R$, so bildeten $\triangle\,\triangle'\,\triangle''$ drei aneinanderliegende Dreiecke, welcher Fall schon behandelt ist. Es sei also $\alpha > 1R$. Sowie bei A zwei anstossende Elementarwinkel α liegen, muss es bei jedem Punkt sein, z. B. bei C. Läge hier $c = CD \,//\, BA$, so bildeten die Dreiecke DCA, $\triangle$ und $\triangle'$ einen Streifen von drei aneinanderliegenden Elementardreiecken; folglich könnte, wenn überhaupt ein regelmässiges System möglich ist, jedenfalls kein neues entstehen, da dieser Fall schon §. 12 ff. erledigt ist. — Jetzt sei also CD nicht $//\, BA$. Es habe aber zur vorigen symmetrische Lage in Bezug auf CA, so dass $DCA = \alpha$. Ein Linienbündel gleich dem bei E muss nun von jedem Punkt ausgehen. Dadurch wird gefordert, dass auch von A aus vier aufeinanderfolgende b als Sehnen eines Kreises ausgehen. So muss ein reguläres Polygon mit Seite b entstehen; und da es isolirt liegt, führt es nur auf Systeme des Cap. I., nämlich wie die Ausführung der Construction zeigt, auf Fig. 4, 13, 14, welches Specialfälle von I. und IV. sind. Jetzt habe CD eine beliebige andere Lage. Dann darf $CE = b$ mit CA nur einen spitzen Winkel ω bilden. Sowie jetzt von C drei b und ein c auslaufen, muss es auch bei A sein, d. h. hier muss noch ein b in den Winkelraum CAA'' hineinlaufen. Dies ist zweifach möglich: Es bildet entweder mit AC oder mit AA'' den Winkel ω.

Im ersteren Fall schliesst sich an dies $b = AF$ das Elementardreieck so an, dass $FG = c$ von C weggewandt ist (Fig. 39). Nun bilden Dreieck AFG, $\triangle$, $\triangle'$ und δ vier so gelegene Dreiecke, wie sie bereits in diesem Paragraphen sub a, α) untersucht sind, so dass hieraus kein neues System entspringen kann.

Im anderen Fall bekommt das Dreieck AFG eine gegen vorher umgewendete Lage $AF'G'$. Denkt man jetzt die Figur von der Hinterseite der Ebene her betrachtet, so enthält sie wieder vier Dreiecke von der Lage der sub a, α) betrachteten nämlich $AF'G'$, δ, $\triangle$ und ABH, wo BH der Schenkel b des zweiten bei B geforderten Elementarwinkels α ist. Somit kann auch hier kein neues regelmässiges System entspringen.

§. 17. *Zweiter Fall. Fortsetzung. Lage* b kann beim stumpfwink-

ligen Elementardreiecke nicht stattfinden. (Satz 1). Beim rechtwinkligen giebt es auch nur die eine Möglichkeit des zweimaligen Vorkommens von α bei A, dass δ auf $\triangle'$ und $\triangle''$ zugleich liegt, und diese ist stets von selbst erfüllt. Vgl. Fig. 34, in der α und folglich $A'AA'' = 1R$ gemacht zu denken ist; hier ist Dreieck $A'AA'' = \delta$. Nur zwei c können von einem Punkt ausgehen, so wie es bei A der Fall. Das von A' entspringende zweite $c = A'D$ hat nur die eine mögliche Lage, welche gezeichnet ist. Das von B entspringende zweite c kann entweder nach der in der Figur angegebenen Richtung verlaufen $= BE$; dann entstände ein reguläres Polygon mit Seite c, also nichts Neues. Oder c verläuft nach der andern Seite; dann würden die c einen wellenförmigen Zug bilden, dessen Existenz sich wie bei Lage a, β (§. 16) als unmöglich erweist.

Lage c, α). Die stumpf- oder rechtwinkligen Dreiecke $\triangle\triangle'\triangle''\delta$ haben die Lage der Fig. 35. Von A' muss ein zweites c ausgehen, ebenso wie es bei A der Fall. Seine einzig mögliche Lage ist die gezeichnete gleich $A'E$. Das zweite von B ausgehende c kann nun entweder den Linienzug $EA'AB$ so fortsetzen, dass alle vier Linien die Sehnen eines Kreises bilden. Indem nun ein ebensolches Linienbündel wie von E auch von A ausgehen muss, wird die Schliessung dieses Sehnenzuges zu einem regulären Polygon gefordert. Und weil bei A kein drittes c vorkommen kann, ist es ein isolirtes Polygon. Wenn also hier überhaupt ein System entstände (was übrigens nicht der Fall), so wäre es jedenfalls eins der in Cap. I. ermittelten.

Oder das zweite von B ausgehende c verläuft in solcher Richtung dass $EA'ABF$ einem unendlichen wellenförmigen Zuge angehören; aber dann entstehen Widersprüche. Denn der convexe Winkel $A'AB$ kann (Satz 2) nicht $< 2\alpha + 2\gamma$ sein, folglich der gleichnamige concave nicht $> 2\beta$. Dasselbe gilt für den ihm gleichen Winkel ABF. Dieser aber kann nicht $< 2\beta$ sein. Also bleibt als Grösse dieses Winkels nur 2β übrig. Dann aber ist $B''D = c$. Da nun die Fortsetzung des Zuges $CB''D$ zu einem mit dem vorigen übereinstimmenden Wellenzuge unmöglich ist, (Satz 1), und doch durch B'' ein solcher gehen müsste, so entsteht hier kein regelmässiges System.

Lage c, β). Sollte δ symmetrisch auf $\triangle''$ liegen, so müssten von

A drei c auslaufen, was unmöglich (Satz 4), sowohl für $\alpha >$, als für $\alpha = 1\,R$.

Lage c, γ). Wenn δ symmetrisch auf $\triangle'$ und $\triangle''$ zugleich liegt (Fig. 40, cf. XIIa.), so folgt wie bei Lage c, α) dieses Paragraphen, dass die c entweder ein reguläres Polygon oder einen unendlichen wellenförmigen Zug bilden müssen. Im ersteren Falle können, da das Polygon isolirt liegt, nur Systeme des Cap. I. entstehen (nämlich Fig. 14, wie näheres Eingehen zeigt).

Im Falle des Vorhandenseins von Wellenzügen müssen solche durch jeden Punkt gehen, so durch C und C'. Dass die Wellenzüge nicht convergiren dürfen, ist schon bewiesen (§. 16). Sollen also die beiden durch C und durch C' gehenden Züge dem durch A gehenden // sein, d. h. // AA', so kann dies nur dadurch geschehen, dass beide zusammenfallen. Da nun CE und $C'E'$ // AA' sind, so müssen zwischen C und C' drei c liegen, wie die Fig. 40 angiebt. Dies System XIIa. ist ein Specialfall des früher gefundenen Systems XII.

Für $\alpha = 1\,R$ entstehen drei aneinanderliegende Dreiecke, folglich nichts Neues.

§. 18. *Dritter Fall. Alle drei Dreiecke getrennt.* Wenn die drei mit je einer Ecke im Punkt A liegenden Dreiecke $\triangle\,\triangle'\,\triangle''$ getrennt sind, können sie entweder in der genannten Reihenfolge (dieselbe im Sinn der Uhrzeigerdrehung gezählt) um A herumliegen, oder in der Reihenfolge $\triangle\,\triangle''\,\triangle'$. Den ersteren Fall erhält man aus der Fig. 23 oder 24 durch Trennung der dort aneinanderliegenden Dreiecke.

Die Reihenfolge $\triangle\,\triangle''\,\triangle'$ ist überhaupt nur für die eine Lage möglich (Satz 2), dass alle drei Dreiecke // liegen. Dies liefert ein System, nämlich den schon früher gefundenen Specialfall des Systems XI. (Fig. 28): das *Bravais*sche parallelogrammatische Gitter.

Jetzt seien die Dreiecke in der Reihenfolge $\triangle\,\triangle'\,\triangle''$ bei A. Zuerst wird angenommen, der Elementarwinkel α komme hier nur einmal vor. Dann folgt wie im §. 14 die Existenz eines regulären Polygons mit Seite c und eines solchen mit Seite b; sie sind isolirt, also müssen die hier entspringenden Systeme schon im Cap. I. enthalten sein. (Da übrigens sich ergiebt, dass das Polygon mit Seite c hier nur ein *Dreieck* sein darf, so entsteht kein System, denn dieses Dreieck hätte zu kleinen Umfang).

§. 19. Nimmt man ferner an, α liege zwei Mal bei A, so zeigt sich, wie im §. 15, dass der zweite Winkel α jedenfalls nicht in den Lücken zwischen den drei Dreiecken liegen kann.

Liegt aber der zweite Winkel α, einem Dreieck ϑ angehörig, auf einem der anderen drei Dreiecke, so giebt es dafür die drei Möglichkeiten des §. 16, indem $\alpha \gtreqless 1R$ ist.

α) $\triangle'$ und ϑ haben Seite c gemein und liegen symmetrisch auf einander. (Vergl. Fig. 35, in der nur $\triangle$ und $\triangle''$ nicht aneinanderliegend zu denken sind). Dass hier keine neuen Systeme entstehen können, folgt wie §. 17 sub c, α). Denn die c bilden entweder isolirte reguläre Polygone oder unendliche Wellenzüge. Letzteres ist aber ausgeschlossen, weil Seite c des Dreiecks $\triangle''$ hier keiner der drei Richtungen EA', $A'A$, AB des Wellenzugs bei A // ist, also einem Wellenzuge angehören müsste, der den anderen schnitte.

β) Dass $\triangle''$ und ϑ Seite b gemein haben und auf einander liegen, würde drei von A auslaufende c verlangen, was unmöglich. (Satz 4).

γ) Liegt ϑ symmetrisch auf $\triangle'$ und $\triangle''$ zugleich, so ändert sich, für $\alpha > 1R$, an den Betrachtungen des Falls α nichts Wesentliches, so dass sich wieder kein neues System ergiebt. Für $\alpha = 1R$ aber würden $\triangle'$ und $\triangle''$ an einander liegen, was mit dem in §. 17, Lage b, behandelten Fall übereinkäme.

§. 20. *Resultat dieses Capitels.* Ausser solchen regelmässigen Systemen, welche schon in Cap. I. gefunden sind, haben sich noch drei neue Systeme ergeben. Diese enthalten unendliche, parallele, in gleichen Abständen von einander stehende Streifen, die auf den beiden Grenzlinien in gleichen Abständen mit Punkten besetzt sind. Die Streifen sind entweder congruent, und jeder ist gegen den vorhergehenden gleichviel und in demselben Sinne verschoben (System XI.); oder sie sind symmetrisch, und je zwei benachbarte haben auch symmetrische Lage (XII.); oder sie sind aus der vorigen Lage um den halben Punktabstand der Grenzlinien gegen einander verschoben (XIII.).

Capitel IV.

Aufsuchung aller Systeme, in denen drei ungleichseitige Elementardreiecke, deren zwei congruent sind, während das dritte symmetrisch ist, mit verschiedenen Winkeln bei demselben Punkt liegen.

§. 21. Man hat fünf Fälle zu unterscheiden:

1. **Beide congruenten Dreiecke an einander, das symmetrische auf einem von ihnen. Dies ist nur möglich für $\alpha \geqq 1R$ (Satz 3).**
2. **Beide congruenten Dreiecke an einander, das symmetrische getrennt.**
3. **Zwei symmetrische Dreiecke auf einander, das dritte getrennt. Nur möglich bei $\alpha \geqq 1R$.**
4. **Alle drei Dreiecke getrennt.**
5. **Alle drei Dreiecke auf einander. Nur möglich bei $\alpha \geqq 1R$.**

Innerhalb dieser Fälle sind wieder die Unterfälle zu unterscheiden:

- **a) $\triangle''$ symmetrisch zu $\triangle$ und $\triangle'$,**
- **b) $\triangle'$ symmetrisch zu $\triangle''$ und $\triangle$,**
- **c) $\triangle'$ und $\triangle''$ symmetrisch zu $\triangle$.**

§. 22. ***Erster Fall. Zwei congruente Dreiecke an einander, das symmetrische auf einem von ihnen.***

Unterfall **a).** ***$\triangle''$ symmetrisch zu $\triangle$ und $\triangle'$.*** **Jetzt kann nur $\triangle''$ symmetrisch auf $\triangle$ liegen, indem beide Dreiecke b gemein haben.**

Zunächst wird angenommen, Elementarwinkel α liege nur ein Mal bei jedem Punkt. Dann muss bei C Winkel β dem α ebenso anliegen, wie bei A (Fig. 41). In dem so geforderten Elementardreieck $B''CD$ muss Winkel γ ebenso in α liegen, wie bei A. So fortschliessend erkennt man, dass die Punkte in abwechselnd gleichen Abständen b und d auf den parallelen Grenzlinien eines unendlichen Streifens liegen, welcher im Uebrigen punktfrei sein muss (Satz 1).

Im *Unterfall* b), wo $\triangle'$ symmetrisch auf $\triangle$ liegt, findet man analog einen alternirend besetzten unendlichen Streifen; hier sind aber die Abstände c und d.

Der *Unterfall* c) kann im hier behandelten Fall 1. für $\alpha > 1R$ überhaupt nicht eintreten, weil er verlangen würde, dass die beiden congruenten

Dreiecke $\triangle'$ und $\triangle''$ mit a an einander liegen, was unmöglich (Satz 1). Für $a = 1R$ ist es zwar möglich, gehört aber dann zu Fall 5.

Soll das System nun nach zwei Dimensionen unbegrenzt sein, so muss es ausserhalb des alternirend besetzten Streifens noch Punkte besitzen. P sei ein solcher, dass kein anderer näher als er an einer der Grenzlinien des Streifens liege. Ein dem von A ausgehenden entsprechendes Linienbündel muss sich bei C finden. Da hier nur ein α liegt, ist die Lage des Bündels eindeutig bestimmt. So wird ein Punkt Q gefordert, symmetrisch zu P in Bezug auf eine Grade MN, die, mitten zwischen A und C hindurchgehend, den Anfangsstreifen symmetrisch theilt. Es ist klar, dass diese Gerade ebenso das ganze System symmetrisch theilen muss. Wie jeder Punkt, so muss auch P der Grenzlinie eines dem ersteren entsprechenden unendlichen Streifens angehören. Zunächst wird angenommen, dieser Streifen laufe dem ersteren //, so kann er, da er durch MN symmetrisch getheilt werden muss, nur zwei Lagen haben: entweder so, dass PQ gleich dem kleineren, oder dass es gleich dem grösseren der zwei auf der Grenzlinie abwechselnden Punktabstände ist. Im ersteren Falle liefert die Weiterführung der Construction *ein System aus abwechselnd symmetrisch gestellten, auf den Grenzlinien alternirend besetzten, unendlichen Streifen, welches indessen lauter isolirte Rechtecke enthält und somit schon in Cap.* I. *enthalten ist; es ist System* VI. Im andern Fall *besteht das System aus denselben Streifen, in denselben Abständen, deren je zwei aber gegen vorher um eine Strecke, gleich dem arithmetischen Mittel der zwei abwechselnden Punktabstände, gegeneinander verschoben sind.* Dies System ist nicht wesentlich von dem in diesem Capitel gefundenen System XII. verschieden.

Wenn aber der durch P gehende unendliche Streifen gegen den anfänglichen convergirt, so muss der durch Q gehende symmetrisch zu ihm liegen in Bezug auf MN. Wären diese beiden //, so hätte man die vorigen beiden Systeme und darin noch die Punkte des Anfangsstreifens, was unmöglich. Sind sie nicht //, so müssen sie sich durchschneiden, und zwar ohne einen Systempunkt gemein zu haben, denn ein solcher würde für zwei Elementarwinkel α der Scheitel sein, was in diesem Paragraphen ausgeschlossen. Diesen Schnitt zeigt Fig. 42, resp. 43, für die Fälle, wo keiner oder einer der beiden

alternirenden Punktabstände der Streifengrenze gleich c ist. In beiden Figuren sind ABC und $A'B'C'$ zwei symmetrisch sich durchschneidende Elementardreiecke. Da nun im symmetrischen Paralleltrapez eine nicht parallele Seite stets $<$ die Diagonale ist, so ist in beiden Fällen $C'A < b$ und $C'B < a$. Folglich ist beide Mal ABC' ein die Seite c enthaltendes Dreieck von zu kleinem Umfange. Also entsteht hier kein regelmässiges System.

§. 23. *Erster Fall. Fortsetzung. Elementarwinkel α komme mehr als ein Mal bei jedem Punkt vor.*

Unterfall a). $\triangle''$ symmetrisch zu $\triangle$ und $\triangle'$. Nur für $\alpha = 1R$ könnte das den zweiten Winkel α enthaltende Dreieck δ zu $\triangle$ congruent sein, und dann müsste es als Scheiteldreieck zu ihm liegen, wodurch ein Specialfall des Systems XI. entsteht. Wenn aber $\alpha > 1R$, so ist δ symmetrisch zu $\triangle$ (Satz 5). Zunächst möge δ frei liegen (Fig. 44); dann führen dieselben Betrachtungen, wie in §. 16, Lage a,β) darauf, dass hierbei kein regelmässiges System möglich ist.

Wenn aber Dreieck δ mit Seite b dem Dreieck $\triangle$ anliegt, so müssen, wie bei A zwei Elementarwinkel α aneinanderliegen, sich bei C zwei ebensolche finden, d. h. es muss CF gleich und $// BA$ sein. Die Dreiecke FCA, $\triangle$ und $\triangle'$ sind nun drei aneinanderliegende, und dieser Fall ist früher erledigt (§. 12, Fig. 26).

Wenn endlich δ mit Seite c dem $\triangle$ anliegt, so müssen in gleicher Weise wie bei A auch bei B und C zwei α mit Schenkel c aneinanderliegen. So entsteht eine Zusammenstellung von Dreiecken, wie sie schon im §. 16 bei Lage a,γ) Fig. 39 untersucht ist, so dass hier kein neues System entspringen kann.

Unterfall b). $\triangle'$ symmetrisch zu $\triangle''$ und $\triangle$. Wieder kommt nur $\alpha > 1R$ in Betracht, wobei das den zweiten Winkel α enthaltende Dreieck δ symmetrisch zu $\triangle$ ist. (Fig. 45). Wenn δ und $\triangle$ getrennt liegen, so bilden die beiden von A auslaufenden c jedenfalls einen Winkel $> \alpha$ (Satz 2).

So wie in A müssen auch in C zwei Elementarwinkel α liegen. Der Schenkel $CG = b$ des zweiten ist jedenfalls nicht $// AB$, sondern convergirt gegen B hin. Ist nun $CC' \geq b$, so kommt G in's Innere der Elemen-

tarellipse über AB; ist aber $CC' < b$, so kommt C' in's Innere der Elementarellipse über CF. Beides ist unerlaubt (Satz 1).

Wenn δ und $\triangle$ mit b aneinanderliegen, wird CF gleich und // DA gefordert. Aber die Dreiecke FCA, δ und $\triangle'$ sind $\cong$, also ist dieser Fall schon früher erledigt (nämlich §. 17, Lage c, γ), Fig. 40). Liegen endlich $\triangle$ und δ mit c aneinander, so muss auch in B neben dem α des Dreiecks $\triangle'$ ein zweites $\alpha = ABH$ anliegen. Weil nun die Dreiecke ABH, $\triangle$ und $\triangle''$ congruent sind, ist dieser Fall schon früher erledigt (§. 12, Fig. 25).

§. 24. *Zweiter Fall. Zwei congruente Dreiecke aneinander, das symmetrische getrennt.*

Zunächst liege α nur ein Mal bei jedem Punkt.

Unterfall a). $\triangle \cong \triangle'$ aneinander, das symmetrische $\triangle''$ getrennt. (Fig. 46). So wie die Elementarwinkel β und γ bei A gegen α liegen, müssen sie sich auch bei A'' finden. Sie gehören zwei neuen Elementardreiecken an, und das in jedem von letzteren enthaltene α fordert wieder β und γ so, wie bei A, neben sich. So fortschliessend erkennt man, dass je vier Elementarparallelogramme (bestehend aus zwei mit c aneinanderliegenden Elementardreiecken) sich mit den Ecken aneinander reihen und dadurch ein Parallelogramm mit denselben Seiten, aber beliebigen Winkeln umschliessen. Die vier herumstehenden Elementarparallelogramme sind abwechselnd symmetrisch.

Das so entstehende regelmässige System XIII'., *gebildet aus zwei Arten von Parallelogrammen mit denselben Seiten, aber ungleichen Winkeln*, ist indess nicht wesentlich verschieden von dem System XIII. (§. 13), denn AD und BE lassen sich als Grenzlinien eines unendlichen Streifens ansehen, und $A''C$ und $B''F$ als die eines parallelen symmetrischen Streifens, der gegen den ersteren um $\frac{1}{2} AD$ verschoben ist.

Die *Unterfälle* b) und c) liefern ebensolche Systeme, nur dass dort a und c, resp. b und c als Parallelogrammseiten auftreten, statt der eben vorgekommenen a und b.

§. 25. *Zweiter Fall. Fortsetzung.* Jetzt liege α nochmals bei A, zunächst aber nur in den Lücken zwischen den vorhandenen Dreiecken.

Unterfall a). Sowohl wenn man den zweiten Elementarwinkel α mit seinem Schenkel b an $\triangle''$, als wenn man ihn an $\triangle$ anlegt, erhält man

mögliche Anordnungen, gebildet aus unendlichen Streifen, deren Grenzlinien im ersten Fall im Abstande a, im zweiten im Abstande b mit Punkten besetzt sind. Je zwei Nachbarstreifen liegen aneinander und zwar symmetrisch. Das ist aber der Specialfall b. des früheren Systems XI. (Fig. 29). Sucht man dagegen den zweiten Winkel α irgend wie anders in die Lücken zu legen, so entstehen Widersprüche, indem nach Satz 2. mehr als $4R$ um A herum gefordert werden.

Bei *Unterfall* b) geben dieselben Betrachtungen eines der eben gefundenen Systeme und ein entsprechendes, bei dem die Grenzlinien im Abstand c besetzt sind.

Im *Unterfall* c) (Fig. 47) kann α sowohl an $\triangle'$ als an $\triangle''$ angelegt werden, wodurch ein Streifen dreier aneinandergereihter congruenter Dreiecke entsteht, was schon im vorigen Capitel untersucht ist. Jede Hineinlegung von α in die Lücken auf andere Art führt nach Satz 2. auf Widersprüche.

§. 26. *Zweiter Fall. Fortsetzung.* Der zweite Elementarwinkel α, $\geqq 1R$, angehörig einem Dreieck δ, liege auf einem der gegebenen drei Dreiecke.

Unterfall a). $\triangle$ und $\triangle'$ mit c aneinander, $\triangle''$ symmetrisch und frei. Zufolge Satz 5. ist die einzig mögliche Lage von δ die, dass es symmetrisch auf $\triangle'$ liegt und c mit ihm gemein hat. So wie in A zwei α neben einander liegen, muss es auch in B sein; so wird Punkt H gefordert. (Vgl. Fig. 39, aus welcher hier nur die Dreiecke $\triangle$, $\triangle'$, δ, $AF'G'$ als jetziges $\triangle''$, und ABH in Betracht kommen). Die Figur enthält jetzt drei congruente Elementardreiecke, mit verschiedenen Winkeln in A gelegen, nämlich δ, ABH, $AF'G'$, und dieser Fall ist schon im vorigen Capitel erledigt. (§. 16, Lage a, α).

Läge im speciellen Fall $AF'G' = \triangle''$ mit b an δ an, so bildeten diese beiden Dreiecke und ABH drei aneinanderliegende congruente, was ebenfalls schon erledigt ist (§. 12).

Unterfall b). $\triangle$ und $\triangle''$ mit b aneinander, $\triangle'$ symmetrisch, frei. Hier kann der zweite Elementarwinkel α *nur so* ein zweites Mal in A liegen, dass sein Dreieck δ symmetrisch auf $\triangle''$ und gleichzeitig an $\triangle'$ anliegt (Fig. 48), denn andern Falls würden drei von A auslaufende c verlangt,

was unmöglich. (Satz 4). Jetzt sind $\triangle''$, δ und $\triangle'$ drei von einem Punkt aus an- und aufeinanderliegende Dreiecke, deren eines symmetrisch zu den andern. Das ist im §. 22 und 23 erledigt.

Unterfall c) ist bei $\alpha > 1R$ unmöglich (Satz 1); bei $\alpha = 1R$ folgt nur die Anordnung nach rechteckigen Maschen, die ein Specialfall von System XIa. ist.

§. 27. *Dritter Fall. Zwei symmetrische Dreiecke aufeinander, das dritte getrennt.* Hier muss $\alpha \gtreqq 1R$ sein.

Zunächst liege α bei jedem Punkt nur ein Mal.

Unterfall a). Die stumpf- oder rechtwinkligen $\triangle$ und $\triangle''$ haben b gemein und liegen symmetrisch aufeinander, $\triangle' \cong \triangle$ liegt frei. So wie bei A die $\sphericalangle\, \beta$ und γ gegen α liegen, muss es bei A' sein, (Fig. 49); so wird Punkt D gefordert. An den hier liegenden Winkel α muss sich wieder ebenso, wie bei A, der Winkel β anschliessen. So fortschliessend erkennt man, dass sich die c zu einem regulären Polygon aneinander schliessen müssen. Weil bei A kein drittes c entspringen kann, ist es isolirt. Wenn also hier ein regelmässiges System möglich ist, so ist es doch jedenfalls schon im Cap. I. ermittelt.

Unterfall b). $\triangle$ und $\triangle'$ haben c gemein und liegen symmetrisch aufeinander, $\triangle''$ ($\cong \triangle$) liegt frei. Dieselbe Schlussweise wie vorher liefert die Existenz von regulären Polygonen mit Seite b; und die Ausführung der Construction zeigt, dass kein zweites congruentes Polygon seine Ecke in A hat. So wird man hier auf die schon in Cap. I. gefundenen Systeme (II., V. und Fig. 3) mit regulären Dreiecken, Vierecken und Sechsecken geführt.

Unterfall c). Hier kann entweder $\triangle'$ oder $\triangle''$ auf $\triangle$ liegen, da beide zu $\triangle$ symmetrisch sind. Den ersteren Fall zeigt Fig. 50. So wie bei A die Winkel β und γ gegen α liegen, muss es auch bei A'' sein. So werden die Punkte D, E, F, G gefordert; und zwar ist das Viereck $A''EFG \parallel CABC'$. Nun muss der Winkel $A''AB > \alpha$, aber $< 2R$ sein. Der Werth α ist ja in diesem Paragraphen ausdrücklich ausgeschlossen; und der Werth $2R$ würde die Linien AD und AC ineinander fallen lassen, was wegen Satz 1. unerlaubt. Nur wenn AD gerade gleich AC, so würde D in C fallen und das schon in §. 16, Lage a, α) gefundene specielle System

wieder entstehen. — Wenn aber $A''AB$ zwischen jenen Grenzen liegt, so fällt Punkt G stets ins Innere der zu AB gehörigen Elementarellipse, was unerlaubt. Also kann hier kein System entstehen.

Wenn dagegen $\triangle''$ symmetrisch auf $\triangle$ liegt, während $\triangle'$ ($\cong \triangle''$) freiliegt, entsteht eine Figur, die aus Fig. 49 dadurch hervorgeht, dass das Viereck $AA'C'F$ durch ein ihm symmetrisches, ebenfalls von A ausgehendes ersetzt wird. Wie nun in A die Winkel β und γ gegen α liegen, muss es auch in A' sein. So wird ein treppenförmiger Zug von Linien c gefordert. Ein ebensolcher muss durch C gehen. Weil jedoch $B''C$ im Allgemeinen keiner der beiden im vorigen Zuge vorkommenden Richtungen // ist, convergiren beide Züge, was auf Widersprüche führt. (§. 16.) Nur in dem speciellen Fall, wo $AA' \parallel B''C$, verlaufen beide Züge //. Dann aber liegen zwei α bei A, was in diesem Paragraphen ausgeschlossen. Somit entsteht hier kein System.

§. 28. *Dritter Fall. Fortsetzung.* α komme mehr als ein Mal bei A vor, so ist dies nur so möglich (Satz 4 und 5), dass das zweite α einem zu $\triangle$ symmetrischen Dreieck δ angehört, und dass, wenn bei A schon ein c vorhanden ist, sein Schenkel c mit diesem zusammenfällt.

Unterfall a). δ kann nur symmetrisch auf $\triangle'$ liegen und c mit ihm gemein haben. (Fig. 49).

Wenn es gleichzeitig mit seinem b an $\triangle$ anliegt, so sind $\triangle''$, δ, $\triangle'$ drei an- und aufeinanderliegende Dreiecke, die mit verschiedenen Winkeln an demselben Punkt liegen, und dieser Fall ist bereits untersucht (§§. 22, 23).

Liegen aber δ und $\triangle$ nicht aneinander, so kann durch A entweder ein wellenförmiger Zug von c gehen, oder ein reguläres Polygon mit Seite c. Fände ersteres statt, so würde der durch C gehende congruente Wellenzug gegen den ersteren convergiren, was unerlaubt ist (§. 16). Schliessen sich dagegen die c zu einem regulären Polygon, so ist dies ein isolirtes, liefert also nur Systeme, die schon in Cap. I. gefunden sind. (Fig. 3).

Unterfall b). Da δ symmetrisch zu $\triangle$ sein muss, so ist es $\cong \triangle'$ und symmetrisch zu $\triangle''$, so dass $\triangle'\,\triangle''\,\delta$ drei solche Dreiecke bilden, wie sie soeben behandelt sind.

Unterfall c). Da δ symmetrisch zu $\triangle$, so ist es $\cong \triangle'$ und $\triangle''$

also sind dies drei ≌ Dreiecke, die mit verschiedenen Winkeln in einem Punkt liegen, und dies ist im vorigen Capitel untersucht.

§. 29. *Vierter Fall. Alle drei Dreiecke getrennt.* Man hat zu unterscheiden, ob die Dreiecke in der Reihenfolge $\triangle\,\triangle'\,\triangle''$ oder $\triangle\,\triangle''\,\triangle'$ (gezählt im Sinne der Uhrzeigerdrehung) um A herumliegen.

Unterfall a). $\triangle''$ symmetrisch zu den beiden anderen. Reihenfolge $\triangle\,\triangle''\,\triangle'$ (Fig. 51). Nach Satz 2. dürfen die Winkel zwischen $\triangle$ und $\triangle''$, $\triangle''$ und $\triangle'$, $\triangle'$ und $\triangle$ nicht $<$ sein als resp. α, β, γ. Wäre aber einer dieser Winkel gleich dem angegebenen Grenzwerth, so lägen zwei ≌ Dreiecke aneinander, und ausserdem fände sich ein Dreieck mit dem dritten Winkel an demselben Punkt. Dieser Fall ist aber schon behandelt, mag das dritte Dreieck ≌ oder symmetrisch zu den beiden ersteren sein. — Grösser als der angegebene Grenzwerth kann aber keiner der drei Winkel werden, weil dann mehr als $4\,R$ um A herumliegen müssten.

Unterfall b) mit derselben Reihenfolge, und

Unterfall c) mit der Reihenfolge $\triangle\,\triangle'\,\triangle''$ liefern ebenfalls keine neuen Systeme, was auf analogem Wege gefunden wird.

§. 30. *Vierter Fall. Fortsetzung.* Es bleibt in allen drei Unterfällen die entgegengesetzte Reihenfolge zu untersuchen. Zunächst wird angenommen, α liege nur ein Mal bei jedem Punkt.

Unterfall a). Die hergehörige Figur entsteht aus 51 durch Vertauschung von $\triangle'$ und $\triangle''$. So wie bei A β zu α liegt, muss es auch bei A' sein. So fortschliessend erhält man ein reguläres Polygon mit Seite c, welches ein isolirtes sein muss, da ein drittes von A ausgehendes c eine Summe $> 4\,R$ um A fordern würde. Wenn also hier überhaupt ein System entstehen kann, so ist es jedenfalls schon in Cap. I. enthalten.

Unterfall b). Auf demselben Wege, wie soeben, wird man auf ein reguläres isolirtes Polygon mit Seite b geführt, so dass wieder kein neues System entstehen kann.

Unterfall c). Die hergehörige Figur entsteht aus 51, wenn das dortige $\triangle'$ durch ein ihm symmetrisches ersetzt wird. So wie bei A $\measuredangle\,\beta$ zu α liegt, muss es bei A' sein. Das sich dort anschliessende Dreieck ist $//\,\triangle$. Also bilden die c einen treppenförmigen Zug. Ein ebensolcher muss durch

$A'' B''$ verlaufen; und da letzterer stets gegen den vorigen convergiren muss, entstehen Widersprüche (§. 16).

§. 31. *Vierter Fall. Fortsetzung.* Angenommen, α finde sich ein zweites Mal bei A. Dass es nicht in den Lücken zwischen den drei Dreiecken liegen kann, lehrt für alle drei Unterfälle Satz 2. Wenn aber für $\alpha \geqq 1R$ das den zweiten Winkel α enthaltende, nach Satz 5 zu $\triangle$ stets symmetrische Dreieck δ symmetrisch auf $\triangle'$ oder auf $\triangle''$ liegt, so sind $\triangle' \triangle'' \delta$ immer drei Dreiecke von der Art, dass sie verschiedene Winkel bei demselben Punkt liegen haben, und dass zwei von ihnen aufeinanderliegen, während das dritte entweder frei oder einem von den anderen anliegt.

Dies ist aber in den Fällen 1 und 3 dieses Capitels bereits erledigt.

§. 32. *Fünfter Fall. Alle drei Dreiecke aufeinander.* Das ist nur bei $\alpha \geqq 1R$ möglich und zwar nur so, dass $\triangle'$ und $\triangle''$ symmetrisch zu $\triangle$ sind, während ersteres Seite c, letzteres Seite b auf den gleichen Seiten von $\triangle$ liegen hat (Fig. 52).

Läge α ein zweites Mal bei A, so wäre das Dreieck δ, in dem dies α liegt, symmetrisch zu $\triangle$ (Satz 5), also $\cong \triangle'$ und $\triangle''$. Somit lägen drei $\cong$ Dreiecke mit verschiedenen Winkeln bei demselben Punkt, und dies ist im Cap. III. erledigt.

Wenn dagegen α nur ein Mal bei jedem Punkt liegt, so müssen die Winkel β und γ in dem bei C befindlichen α ebenso liegen, wie es bei A der Fall. So fortschliessend erkennt man, dass stets abwechselnd Seite c und b sich unter demselben Winkel α aneinander schliessen, wodurch ein halbreguläres Polygon entsteht. Dass die Figur sich wirklich zu einem solchen *schliessen* muss, folgt aus Satz 1. (Vgl. die ähnliche Betrachtung im §. 14). Andere als die Eckpunkte dieses Polygons werden nicht gefordert; soll trotzdem das System unbegrenzt sein, so müssen ausserhalb irgendwo noch Punkte liegen. Diese müssen ebenfalls congruenten Polygonen angehören, welche von ersteren isolirt sind; sonst läge ja α zweimal bei A. Alle Systeme mit halbregulären isolirten Polygonen sind aber schon in Cap. I. ermittelt, so dass hier keine neuen Systeme entstehen.

§. 33. Das *Resultat dieses Capitels* ist, dass es keine regelmässigen Systeme geliefert hat, die nicht schon in den vorigen Capiteln gefunden wären.

Capitel V.

Die Systeme mit gleichschenkligem Elementardreieck.

§. 34. Durch Gleichsetzung zweier Seiten des bisher als ungleichseitig vorausgesetzten Elementardreiecks in den bisher gefundenen Systemen erhält man Specialfälle derselben; jedoch bleibt es zweifelhaft, ob hierdurch *alle* Systeme, die bei gleichschenkligem Elementardreieck überhaupt möglich sind, erhalten werden. Daher muss dieser Fall besonders untersucht werden. Die Grundlinie AB des Elementardreiecks heisse jetzt g, der Schenkel $AC = s$, der Basiswinkel σ, der $\sphericalangle$ an der Spitze ω. Wegen der Regelmässigkeit müssen beide Elementarwinkel mit den im Elementardreieck ihnen zukommenden Schenkellängen bei jedem Punkt vorkommen. Drei Fälle sind zu unterscheiden.

1. Die beiden mit den Winkeln σ resp. ω bei einem Punkt liegenden Elementardreiecke $\triangle$ und $\triangle'$ liegen aneinander.
2. Sie liegen aufeinander. Dies erfordert $\omega \gtrsim 1R$.
3. Sie liegen getrennt.

§. 35. *Erster Fall. Beide Elementardreiecke aneinander.* $AC = s$ sei gemeinsam. Dass sich der Basiswinkel σ mehr als ein Mal bei jedem Punkt befinden muss, folgt so: Angenommen, er wäre nur ein Mal vorhanden, so fordert er in B den Winkel ω als anstossenden, wodurch bei C neben ω auch ein σ zu liegen käme, so dass bei C nun doch zwei Basiswinkel σ lägen.

Das Elementardreieck $\triangle''$ mit dem zweiten Basiswinkel bei A kann drei verschiedene Lagen haben, nämlich:

a) Es liegt dem von den ersten zwei Dreiecken gebildeten Parallelogramm an.

b) Es liegt auf $\triangle'$.

c) Es liegt getrennt.

Unterfall a) (Fig. 53). Der Winkel ω sei zunächst $< 1R$. Dann folgt wie im §. 12, dass sich lauter Elementardreiecke zu einem unendlichen Streifen aneinanderschliessen müssen, dessen parallele Grenzlinien in gleichen Abständen s oder g mit Punkten besetzt sind.

Damit das System nach zwei Dimensionen unbegrenzt sei, muss es

noch ausserhalb des Streifens Punkte besitzen; und man findet wie im §. 13, dass diese äusseren Punkte auf // laufenden Streifen liegen müssen. So entstehen Specialfälle der Systeme XI., XII., XIII. Bei den Streifen mit den Punktabständen g (dessen eine Grenzlinie ihre Punkte senkrecht über den Mitten der Punktabstände der anderen liegen hat) scheint sich ein anderes System zu ergeben. Wenn nämlich der nächste Parallelstreifen irgend wie viel gegen den Ausgangsstreifen verschoben ist, so kann der dritte Streifen gegen den zweiten um gleichviel, aber in entgegengesetztem Sinn, verschoben sein, ohne dass die Regelmässigkeit gestört wird. Dies System ist indessen nicht wesentlich von XIII. verschieden; denn wenn man die einander zugewandten Grenzlinien zweier Nachbarstreifen als zusammengehörige Grenzlinien eines neuen, von dem vorigen verschiedenen, Streifens zusammenfasst, so lässt sich das ganze System nun als aus solchen Parallelstreifen bestehend ansehen und ist jetzt mit XIII. identisch.

§. 36. *Erster Fall. Unterfall* a). *Fortsetzung.* $\omega \geqq 1 R$. Bei $\omega > 1 R$ kann $\triangle''$ nur an dem Schenkel von $\triangle'$ anliegen, aber nicht an der Grundlinie von $\triangle$ (Satz 1).

Wenn nun ω nur ein Mal bei jedem Punkt vorkommt, muss in C und B' ebenso wie in A zu jeder Seite von ω ein σ liegen (Fig. 54). So entsteht ein unendlicher Streifen // g, wie im vorigen Paragraphen.

Wenn aber ω mehr als ein Mal bei jedem Punkt liegt, kann man nicht so schliessen. Ist jetzt $\omega = 1 R$, so können beide ω als anstossende oder als Scheitelwinkel liegen, wodurch als System ein Netz mit quadratischen Maschen entsteht. — Ist $\omega = \frac{4}{3} R$, so können nur gerade drei ω um jeden Punkt herumliegen, wodurch als System ein Netz von regelmässig sechsseitigen Maschen entsteht (XI c, Fig. 30). — Für $\omega > \frac{4}{3} R$ können überhaupt nicht zwei ω bei demselben Punkt liegen, weil dadurch Dreiecke zu kleinen Umfangs entständen.

Also bleibt nur der Fall zu untersuchen, wenn $1 R < \omega < \frac{4}{3} R$. Jetzt können beide ω nur als anstossende Winkel liegen, weil sonst mehr als drei kürzeste Elementarlinien s von einem Punkt auslaufen würden, was unerlaubt (Zusatz zu Satz 4). Aus demselben Grunde können nicht mehr als zwei ω bei demselben Punkt vorkommen. Das den zweiten Winkel ω enthaltende Dreieck δ habe $A C$ mit $\triangle'$ gemein (Fig. 54); dann müssen auch

bei C in derselben Weise wie bei A zwei ω aneinanderliegen. Das ist zweifach möglich: Entweder ist CA gemeinsamer Schenkel, oder CB.

1. *Es sei* $ECA = \omega$. Jetzt ist an den gemeinsamen Schenkel jederseits nicht nur ein ω, sondern auch ein σ angelegt. In derselben Weise müssen sich von B' aus an einen der beiden Schenkel s des dem Dreieck $\triangle''$ angehörigen Winkels ω zwei ω und zwei σ anlegen. Der Schenkel $B'A$ kann dies nicht sein, weil dadurch eine vierte von A auslaufende kürzeste Elementarlinie s gefordert würde. Also muss $B'A''$ dieser gemeinsame Schenkel sein, so dass die Punkte FGH gefordert werden. Der in $\triangle''$ enthaltene Winkel ω muss nun einem der beiden bei C befindlichen ω entsprechen. Entspricht er dem Winkel ACB, so müssen drei streifenartig aneinander liegende Dreiecke neben ihm liegen, so wie neben $\triangle$. Jetzt ist der Streifen zu einem aus sechs aneinandergefügten Dreiecken bestehenden angewachsen. Wie $\triangle$ diesen Streifen beginnt, muss $\triangle''$ einen ebensolangen beginnen. So schliesst man auf die Existenz eines unendlichen Streifens $// g$. Derartige Systeme sind aber schon im vorigen Paragraphen untersucht.

Entspricht dagegen Winkel ACE dem in $\triangle''$ befindlichen ω, so folgt, dass sich an $B'A''F$ zwei neue Dreiecke so anschliessen müssen, wie sich $\triangle''$ und $B'A''H$ an $\triangle'$ anschliessen, so dass hierdurch ein zu $B'F$ paralleler Streifen angefangen wird. Hierbei wird auch ein Punkt G' (entsprechend G) gefordert, so gelegen, dass FG' gleich und $// B'A$. Dadurch schliesst sich die Figur $DAB'A''FG'$ zu einem gleichseitigen symmetrischen Sechseck; und die Weiterführung der Construction liefert nun ein System, das aus zwei Gruppen paralleler unendlicher congruenter Streifen gebildet ist, also nur einen Specialfall der allgemeinen Streifensysteme darstellt.

2. $E'CB = \omega$. (Fig. 54). Dem zu δ gehörigen ω kann entweder $E'CB$ oder ACB entsprechen. Wenn ersteres der Fall, so müssen, wie neben $E'CB$ der Zug der Dreiecke $\triangle\,\triangle'\triangle''$ liegt, ebensolche drei neben DAC liegen, d. h. jener Zug muss sich noch um ein Dreieck verlängern. Wie nun vier Dreiecke den von $E'CB$ anhebenden Streifen bilden, so muss es auch neben DAC sein u. s. f. Dadurch entsteht der unendliche Streifen paralle g, also nichts Neues.

Wenn aber ACB dem Winkel DAC entpricht, so muss ebenso, wie

der Zug der drei Dreiecke $\triangle\,\triangle'\,\triangle''$ durch DAC hindurch, ein entsprechender Zug durch ACB gehen. So wird unter anderen Punkt I gefordert. Jetzt liegt im Winkel ACB an jedem Schenkel ein Winkel σ; so muss es auch in DAC sein; daher wird Punkt K gefordert. Dieser liegt nun, da $\omega < \frac{4}{3}R$ ist, zu nahe an I, so dass $IK < s$, also unmöglich. Somit hat dieser Paragraph kein neues System geliefert.

§. 37. *Erster Fall. Unterfall* b). $\triangle''$ *liegt auf* $\triangle'$. (Fig. 55). Zwei Arten dieses Aufeinanderfallens sind zu unterscheiden, nämlich je nachdem $\triangle''$ dem freien Schenkel von $\triangle'$, oder dem den Dreiecken $\triangle$ und $\triangle'$ gemeinsamen Schenkel anliegt.

1. $\triangle''$ *liege dem freien Schenkel* AB' *an.*

Wenn ω bei jedem Punkt nur ein Mal vorkommt, so erweitert sich der Zug dieser drei an- und aufeinanderliegenden Dreiecke zu einem unendlichen Streifen, dessen parallele Grenzlinien in abwechselnd gleichen Abständen mit Punkten besetzt sind. Derartige Systeme sind in §. 22 behandelt, so dass hier nichts Neues entsteht.

Wenn aber ω bei jedem Punkt mehrmals vorkommt, kann man nicht so schliessen. Es können nur zwei ω bei jedem Punkte liegen, und nur als anstossende Winkel. Wie im vorigen Paragraphen ist nur der Fall $1R < \omega < \frac{4}{3}R$ zu untersuchen. Das zweite bei A befindliche ω, angehörig einem Dreieck δ, kann nun entweder an AB' oder an AC anliegen.

α) AB' *sei gemeinsamer Schenkel für* $\triangle'$ und δ. Wie bei A müssen auch bei B zwei ω aneinanderliegen. Schlösse sich hier das zweite ω an $B'A$ an, so würde das zu ihm gehörige Dreieck, zusammen mit $\triangle'$ und $\triangle$, einen Zug dreier Dreiecke bilden, wie er in den zwei vorigen Paragraphen untersucht ist. Schlösse sich aber das zweite ω an $B'A''$ an als $EB'A''$, so könnte dieser Winkel entweder dem in $\triangle'$ oder dem in δ enthaltenen ω entsprechen. Im ersteren Falle würde, wie in $\triangle'$, in ihm ein Winkel σ liegen müssen, angelegt an den gemeinsamen Schenkel beider ω, d. h. an $B'A''$. Das zu diesem σ gehörige Dreieck bildet aber mit $\triangle''$ und δ wieder einen Zug aneinanderliegender Dreiecke, also nichts Neues. — Entspricht dagegen Winkel $EB'A''$ dem in δ liegenden ω, so wird, wie δ gegen $EB'A''$ liegt, zu δ gelegen das Dreieck ACa'' gefordert. Wie nun dieses Dreieck

und δ zu $EB'A''$ liegen, müssen zwei entsprechende gegen δ liegen; so fortschliessend gelangt man zu einem regulären Polygon $A''B'ACa''\cdots$. Dies Polygon kann keine Ecke mit einem ihm congruenten Polygon gemein haben, weil dazu vier s von einem Punkt auslaufen müssten. Da es also isolirt ist, kann es nur zu einem schon im Cap. I. gefundenen System Anlass geben.

β) *AC sei gemeinsamer Schenkel für $\triangle'$ und δ*, so dass jetzt ACd gleich δ. Entsprechend diesen zwei bei A befindlichen ω muss es auch in B' zwei ω geben. Die Anlegung des zweiten ω an $B'A$ würde wieder drei aneinandergereihte Dreiecke, also nichts Neues, geben. Die Anlegung an $B'A''$, so dass $\omega = EB'A''$, fordert, wenn dieser Winkel dem in $\triangle'$ enthaltenen ω entspricht, ein reguläres Polygon $EB'Ad\cdots$, also nichts Neues. Entspricht aber $EB'A''$ dem $\sphericalangle dAC$, so muss er, wie dieser, den Winkel σ, anliegend am gemeinsamen Schenkel $B'A''$, in sich enthalten. So wird Punkt F gefordert. Läge nun in A'' das zweite ω dem $A''B'$ an, so müsste in entsprechender Weise ACa'' dem CA anliegen. Die Endpunkte der freien Schenkel dieser zwei entsprechenden Winkel würden aber um $< s$ voneinander abstehen, was unmöglich. Also kann das zweite ω in A'' nur an $A''F$ anliegen. Ein entsprechender Winkel muss dann an CB anliegen, und die Endpunkte der jetzigen freien Schenkel bestimmen zusammen mit $A''B'AC$ ein gleichseitiges symmetrisches Sechseck, so dass nun von A'' sowohl wie von C je zwei g in den von den beiden aneinanderliegenden ω noch nicht eingenommenen Raum hineinragen. So ist's also bei jedem Punkt; also auch bei A; und dann hat man wieder den Zug dreier aneinandergereihter Dreiecke, also nichts Neues.

2. *$\triangle''$ liege dem, den Dreiecken $\triangle$ und $\triangle'$ gemeinsamen, Schenkel AC an, habe also die Lage ACa''.* In Fig. 55 haben jetzt nur die Dreiecke $\triangle', \triangle, ACa''$ Geltung. Wie bei C zwei ω aneinanderliegen, muss es auch bei B sein, und zwar muss BC einer der drei Schenkel sein, die den anstossenden Winkeln ω angehören.

Läge nun in B ein ω als anstossender Winkel neben ABC, so bildete sein Dreieck, zusammen mit $\triangle$ und $\triangle'$ drei aneinandergereihte, die schon früher behandelt sind. Läge aber dies ω an der anderen Seite von BC, so bildete es, zusammen mit $\triangle\ \triangle'$ und ACa'', eine Combination, nicht

verschieden von der unter 1, β) in diesem Paragraphen behandelten. Somit entsteht hier nichts Neues.

§. 38. *Erster Fall. Unterfall* c). $\triangle''$ liegt getrennt von dem durch $\triangle\,\triangle'$ gebildeten Parallelogramm in A. Dies ist auf zwei Arten möglich: entweder so, dass es als aus der anstossenden Lage herausgedreht angesehen werden kann, oder symmetrisch dazu. *Zunächst wird angenommen, es lägen bei jedem Punkt nur zwei Elementarwinkel* σ.

Wie bei Annahme der ersteren Lage von $\triangle''$ zwei solche Winkel σ bei A liegen, muss es auch bei B sein. So fortschliessend erhält man ein reguläres Polygon mit Seite g, und die Weiterführung der Construction lehrt, dass es isolirt ist. Also entspringen hier nur Systeme, die in Cap. I. gefunden sind.

Bei der zweiten Lage von $\triangle''$ (Fig. 56) müssen in B so wie in A zwei σ liegen. Entspräche Winkel ABC dem BAC, so müsste er einen Winkel ω neben sich haben, und es entstände der Streifen dreier aneinandergereihter Dreiecke, der schon untersucht ist. Entspricht aber Winkel ABC dem $A''AC''$ des Dreiecks $\triangle''$, so muss ein mit $ABCB'$ übereinstimmendes Parallelogramm bei ihm liegen, nämlich $BDEF$. So erhält man das früher gefundene, aus zwei Arten von Parallelogrammen gebildete System (§. 24), welches mit XIII. identisch ist.

Dass drei Elementarwinkel σ *bei einem Punkt vorkommen*, ist, wenn $\omega < \frac{2}{3} R$, entweder unmöglich, oder es führt auf drei zum Streifen aneinandergereihte Dreiecke, was schon behandelt ist. Wenn $\omega > \frac{2}{3} R$, aber $< 1\,R$, gilt Aehnliches; nur wenn das dritte σ dem s des Dreiecks $\triangle''$ anliegt, muss man so schliessen: Weil durch dies Anliegen zwei ω nebeneinanderliegen, muss es auch bei A so sein; und da hierfür kein Platz, so ist diese Lage unmöglich. — Ist endlich $\omega > 1\,R$ (denn $\omega = 1\,R$ liefert nichts Neues), so darf das dritte σ jedenfalls nur mit s an $\triangle''$ anliegen, so dass $\triangle''$ und $AC''a''$ diese zwei σ enthalten (Fig. 56). Wie bei C'' zwei ω aneinanderliegen, muss es auch bei B sein. Damit nun nicht vier s von B ausgehen, was unerlaubt (Zusatz zu Satz 4), so muss BC jedenfalls ein Schenkel des einen der bei B liegenden Winkel ω sein. Mag dieser Winkel nun an dieser oder jener Seite von BC anliegen: so bildet das zu ihm gehörige Dreieck, zusammen mit $\triangle$ und $\triangle'$, entweder drei aneinander-, oder drei an-

und aufeinanderliegende Dreiecke, wie sie in den vorigen Paragraphen untersucht sind.

§. 39. *Zweiter Fall.* $\triangle$ *und* $\triangle'$ *aufeinander*, wobei $\omega \gtreqless 1\,R$. (Fig. 57). Es ist unmöglich, dass σ nur einmal bei jedem Punkt liege. Dann müsste es nämlich bei B ebenso innerhalb eines ω liegen, wie bei A, und dann würden bei C doch zwei σ vorkommen.

Das zweite bei A befindliche σ kann verschiedene Lagen haben.

a) Zunächst liege es auf $\triangle' = B'AD$. Wenn nun ω nur einmal bei jedem Punkt vorkäme, so müssten in dem bei C befindlichen ω auch zwei σ liegen. So käme man auf ein isolirtes reguläres Polygon, also nur auf bekannte Systeme. Wenn aber ω mehrmals bei einem Punkt vorkommt, so dürfen (abgesehen von dem nichts Neues liefernden Fall $\omega = 1\,R$) nur zwei ω als anstossende Winkel vorkommen (Zusatz zu Satz 4). Wenn nun bei A das zweite ω dem Schenkel AC anliegt, bildet sein Dreieck mit $\triangle$ zwei aneinanderliegende; liegt es aber dem Schenkel AB' an, so bildet es mit $AB'D$ zwei aneinanderliegende Dreiecke. Das ist aber in den §§. 35—38 erledigt.

b) Wenn das zweite bei A befindliche σ nicht auf, sondern an $\triangle'$ anliegt, so bildet es mit ihm zwei aneinanderliegende Elementardreiecke der §§. 35—38.

c) Das zweite bei A befindliche σ liege getrennt, und zwar so, als sei $\triangle$ aus seiner Lage herausgedreht, gleich EAF. Wenn nun ω nur ein Mal bei jedem Punkt liegt, so muss $AFE = \omega$ den Winkel σ so in sich enthalten, wie bei A. Nun kann dies σ nicht an FA anliegen, weil dadurch entweder vier s von A ausgehen würden, oder weil zwei ω bei A aneinanderliegen würden. Also kann σ sich nur an FE anlegen, es heisse EFG. Indem sich in F wieder ein äusseres σ vorfinden muss, gegen AFE so gelegen, wie FAE gegen $B'AC$ u. s. f., so gelangt man zu einem regulären Polygon $B'AF\cdots$. Wäre der Polygonwinkel gleich ω, so lägen mehrere ω bei jedem Punkt, was hier ausgeschlossen; wäre aber der Polygonwinkel von ω verschieden, so müsste das Polygon isolirt liegen, damit nicht mehr als drei s von einem Punkt auslaufen. Dann aber entsteht kein neues System.

Wenn dagegen ω mehrmals bei einem Punkt liegt, so ist dies ohne

Widerspruch nur so möglich, dass AF gegen einen der Schenkel des Dreiecks $\triangle'$ unter diesem Winkel geneigt ist. Dann liegt das diesen Winkel enthaltende Dreieck entweder dem $\triangle$ oder dem Dreieck AFE so an, wie es in den §§. 35—38 behandelt ist.

d) Das zweite bei A liegende σ habe eine zur vorigen symmetrische Lage, nämlich $AF'E'$ (Fig. 57). Wenn ω nur ein Mal bei jedem Punkt liegt, muss in $AF'E'$ so wie in $B'AC$ der $\sphericalangle\, \sigma$ liegen; er kann wieder nur an $F'E'$ anliegen, nämlich $E'F'G'$. Man ist nun berechtigt anzunehmen, dass ein drittes σ nicht bei A vorkomme; denn freiliegend würde es vier von A ausgehende s fordern; dagegen an einem der drei vorhandenen s anliegend würde es stets solche Lagen des An- oder Aufeinanderfallens von Elementardreiecken hervorrufen, welche entweder hier ausgeschlossen oder schon behandelt sind. Liegen nun bloss zwei σ bei jedem Punkt, so muss gegen $AB'C = \sigma$ ein ω so liegen, wie $B'AC$ gegen $F'AE'$, d. h. bei B' muss sich ein dem Viereck $AF'E'G'$ paralleles Viereck anschliessen. Der dem Punkte E' entsprechende Punkt E'' dieses Vierecks hat nun von G' stets einen Abstand $< s$, ohne doch in G' hineinfallen zu können. Dies folgt daraus, dass $F'AC > \omega$ sein muss. Also entsteht hier kein mögliches System. Dass aber ω nicht mehrmals bei A liegen kann, folgt wie bei c).

§. 40. *Dritter Fall. $\triangle$ und $\triangle'$ getrennt bei A.* Käme σ nur ein Mal bei jedem Punkt vor, so müsste sich bei jedem der zu $\triangle'$ gehörigen σ ein ω in derselben Lage vorfinden wie bei A. So fortschliessend gelangte man zu einem regulären Polygon mit Seite s. Wäre dasselbe nicht isolirt, so müsste an jeder Ecke noch ein σ liegen, was ausgeschlossen. Ist es aber isolirt, so führt es nur auf Systeme des Cap. I.

Jetzt komme σ bei A zwei Mal vor; so würde es, an $\triangle'$ anliegend, mit diesem zusammen, zwei Elementardreiecke bilden, wie sie schon in den §§. 35—38 untersucht sind. Läge es ferner an der Seite s von $\triangle'$, so entstände der Specialfall b) des Systems XI. (Fig. 29). Läge es aber an der Grundlinie g von $\triangle$, so überzeugt man sich zunächst, dass ein drittes σ nicht bei A vorkommen kann (abgesehen von dem eben erwähnten System Fig. 29). Wie nun bei A zwei Elementardreiecke mit g aneinanderliegen (Fig. 58), muss es auch bei A' sein. Hier muss sich nun ω in derselben Weise anschliessen, wie in A. Dies ist entweder so möglich, dass das zu-

gehörige Dreieck $GFA' \parallel ABD$ liegt; und dann entsteht ein Specialfall des aus zwei Arten von Parallelogrammen gebildeten Systems XIII'. (§. 24), indem hier zweierlei Rhomben mit einander wechseln. Und hier ist wieder der Specialfall bemerkenswerth, dass die eine Art Rhomben Quadrate sind (Fig. 59), welcher gleichzeitig ein Specialfall des Systems IV. ist (IVb'.), falls man dort die Bedingung des Isolirtseins der Polygone aufhebt. — Oder der $\sphericalangle FA'A$ ist $= A'AC$. Da jetzt ein dem beim C befindlichen Linienbündel entsprechendes sich bei A finden muss, so muss sich in F ein Dreieck in derselben Weise anschliessen. So wird man auf ein reguläres Polygon $CAA'F\cdots$ mit Seite s geführt. Die Weiterführung der Construction zeigt, dass dies entweder ein isolirtes Polygon ist, also auf nichts Neues führt; oder dass es ein Quadrat ist, das an den Ecken mit vier congruenten Quadraten zusammenhängt, was jedoch nur ein Specialfall des Systems mit zweierlei Rhomben ist.

Wenn endlich das zweite σ bei A frei zwischen $\triangle$ und $\triangle'$ liegt, so führt es, in die eine oder die andere Lücke gelegt, mit s oder g dem $\triangle$ zugewandt, stets auf Specialfälle von Systemen mit unendlichen Streifen, ausser wenn es mit g dem g des $\triangle$ zugewandt liegt. Weil ein drittes σ bei A nicht möglich ist, müssen an jedem Punkt zwei σ so zueinander liegen wie bei A. Dadurch wird man auf ein reguläres Polygon mit Seite g geführt, und da es isolirt sein muss, entsteht kein neues System.

§. 41. *Resultat dieses Capitels:* Es giebt keine Systeme mit gleichschenkligem Elementardreieck, welche nicht als Specialfälle in den Systemen mit ungleichseitigem Elementardreieck enthalten wären.

Capitel VI.

Die Systeme mit gleichseitigem Elementardreieck.

§. 42. Der Elementarwinkel BAC sei $= \alpha$. Kommt derselbe nur ein Mal bei jedem Punkt vor, so ist das gleichseitige Dreieck isolirt, führt also nur auf die Systeme I., II., III. des Cap. I.

Kommt α aber mehr als ein Mal bei A vor, so ist die höchste Mög-

lichkeit die, dass sechs α um einen Punkt herumliegen. Dies ist ein Specialfall der *Bravais*schen Gitter. Fünf α können nicht um einen Punkt herumliegen. Vier α können einzig auf die Art bei einem Punkt liegen, dass sie aneinanderstossen und dass die äussersten beiden einen Winkel von $\frac{4}{3} R$ zwischen sich lassen. Die Fortführung der Construction liefert das in Fig. 60 dargestellte System mit regulären Dreiecken und Sechsecken von gleichen Seiten, welches ein Specialfall von I. ist (Ib.). Denn von den achtzehn ein Sechseck umstehenden Dreiecken liegen die sechs schattirten so, wie System I. verlangt. Freilich sind diese Polygone nicht mehr isolirt. — Wenn sich nur drei α bei einem Punkt finden, so liegen sie entweder aneinander, und dann entstehen Specialfälle der Systeme mit unendlichen Streifen; oder zwei α liegen aneinander, das dritte getrennt. Dann entsteht wie in §. 40 ein System aus zwei Arten von Rhomben, also ein Specialfall von System XIII., — oder ein System mit regulären Polygonen, welches jedoch hier nur entweder auf einen Specialfall des eben gefundenen führt, bestehend aus Quadraten und Rhomben; oder auf Fig. 60. — Drei α können nicht getrennt bei einem Punkt liegen.

Wenn nur zwei α bei einem Punkt vorkommen, müssen sie jedenfalls getrennt liegen. Haben sie die Lage von Scheitelwinkeln, so gelangt man zu einem System, gebildet aus mit den Ecken zusammenstossenden regulären Sechsecken, deren jedes von sechs regulären Dreiecken umgeben ist. (Fig. 61). Dies System IIIc. ist ein Specialfall der zu System III. gehörigen Fig. 8, wenn die Bedingung des Isolirtseins fallen gelassen wird.

Jetzt mögen beide bei A zusammenstossenden Dreiecke $\triangle$ und $\triangle'$ frei, aber sonst beliebig gegeneinander liegen; der kleinere von den beiden Winkeln, die bei A zwischen beiden Dreiecken liegen, sei ξ. (Fig. 62).

In derselben Weise muss sich in E ein Dreieck $\triangle''$ gegen $\triangle'$ gelegen vorfinden. Doch kann $\triangle''$ entweder mit der einen oder mit der anderen Seite von $\triangle'$ den Winkel ξ bilden.

1. *Es sei* $AEG = BAE = \xi$. (Fig. 62). Von den beiden Dreieckswinkeln bei E kann entweder der zu $\triangle'$ oder der zu $\triangle''$ gehörige dem Winkel BAC entsprechen. *Im ersteren Falle* ergiebt sich die Existenz

eines regulären Polygons mit dem Winkel ξ, welches wegen $\xi < \frac{4}{3} R$ weniger als sechs Seiten haben muss. Auch muss es mehr als drei Seiten haben, da sonst ein dritter Winkel α bei A läge. Wenn es nun ein Vier- oder Fünfeck ist, muss es isolirt sein, weil die Anlegung eines ihm congruenten Polygons in A einen Winkel gleich oder $< \alpha$ hervorbringen würde, was beides ausgeschlossen. Ist es aber isolirt, so liefert es nur Systeme des Cap. I. — Wenn anderenfalls der zu $\triangle''$ gehörige Winkel bei E dem BAC entspricht, haben $\triangle$ und $\triangle''$ symmetrische Stellung gegeneinander, und in demselben Sinne muss die ganze Figur symmetrisch werden. Das in G sich an Dreieck $\triangle''$ anschliessende Dreieck muss gegen $\triangle''$ wieder so liegen wie $\triangle''$ gegen $\triangle'$. Ist dabei Winkel $EGI = \xi$, so entsteht entweder ein reguläres Polygon wie vorher, oder der Punkt I kommt so nahe an den zu ihm symmetrisch gelegenen Punkt I' zu liegen, dass $II' < AB$, und das ist unmöglich. Fielen aber II' zusammen, während die zugehörigen Dreiecke eine andere gegenseitige Lage hätten als $\triangle \triangle'$, so müsste ein drittes Dreieck bei A vorkommen, zu $\triangle$ so gelegen, wie die beiden in I zusammenstossenden gegeneinander. Dann aber lägen drei α bei A, was ausgeschlossen.

Wenn dagegen das in G angeschlossene Dreieck so liegt, dass $FGH = \xi$, so liegt dies Dreieck $/\!/ \triangle'$ Das ihm symmetrische Dreieck $BI'H'$ würde erst bei $\xi = \frac{4}{3} R$ seinen Endpunkt I' im Abstand AB von I liegen haben. Da aber $\xi < \frac{4}{3} R$, so kommen I und I' zu nahe aneinander, oder fallen ineinander, was beides unerlaubt.

2. *Es sei* $DEF' = \xi$. (Fig. 62). Das bei der anderen Ecke von $\triangle'$ sich anschliessende Dreieck KDL kann zwei Lagen haben: entweder ist $LDE = \xi$, oder $KDA = \xi$. Im ersteren Fall bilden die drei Dreiecke KDL, $\triangle'$ und $EF'G'$ dieselbe Figur, wie sub 1) die Dreiecke $\triangle \triangle' \triangle''$, so dass nichts Neues entsteht. Im anderen Fall sind die an die drei Ecken von $\triangle'$ sich anschliessenden Dreiecke untereinander parallel, gegen $\triangle'$ aber beliebig gestellt. In derselben Weise müssen um jedes Dreieck drei untereinander parallele herumstehen. So entsteht Fig. 63, welche indess nur einen Specialfall des Systems III. bildet (IIId.), und gleichzeitig des Systems II., wenn man bei beiden die Bedingung des Isolirtseins der Polygone fortlässt.

§. 43. *Resultat dieses Capitels:* Alle Systeme mit gleichseitigem Elementardreieck sind als Specialfälle in den Systemen der früheren Capitel enthalten.

§. 44. **Zusammenfassung aller Resultate. Schlussbemerkungen.** Es giebt nur dreizehn wesentlich verschiedene Arten regelmässiger Punktsysteme. Zehn derselben lassen sich auffassen als aus lauter congruenten, parallel liegenden, ganz- oder halbregulären (Definition siehe §. 3) Polygonen gebildet, deren Ecken die Systempunkte tragen. Diese Polygone sind entweder reguläre Dreiecke (System I., II., III.) oder Quadrate (System IV., V.) oder Sechsecke (System VI., VII., VIII., X.) oder halbreguläre Sechsecke (System IX.). Systeme, welche sich als aus lauter ganz- oder halbregulären Acht- oder Zwölfecken bestehend ansehen lassen, sind schon in den vorigen Systemen inbegriffen. Systeme mit anderen Polygonen aber giebt es nicht. Die nähere Charakteristik der zehn Polygonalsysteme findet sich im Cap. I., besonders in §. 8.

Die übrigen drei Systeme lassen sich als aus gleichartigen unendlichen parallelen gleich weit von einander stehenden Streifen bestehend ansehen, deren parallele Grenzlinien in gleichen Abständen mit Systempunkten besetzt sind. Die nähere Charakteristik giebt §. 20 (Cap. III.).

Zwischen scheinbar sehr verschiedenen Systemen finden mannigfache Zusammenhänge statt, indem Specialfälle des einen zugleich Specialfälle anderer Systeme sind (Beispiel: Fig. 30 gehört als Specialfall zu XI. und zu Ia.; Fig. 3 gehört zu I. und II., u. s. f.).

Bei den Polygonalsystemen bilden meistens gewisse Punkte engere Gruppen, nämlich jene Polygone, aus denen das System aufgebaut ist, oder auch zwischen denselben gelegene andere Polygone. Andererseits giebt es Fälle, wo eine derartige Zusammenfassung zu engeren Gruppen (bei krystallographischen Betrachtungen: zu zusammengesetzten Molekülen) nicht gerechtfertigt ist, nämlich jene Fälle, wo man von jedem Punkt des Systems zu jedem anderen auf lauter gleichen Elementarlinien fortschreiten kann (z. B. IIa., Fig. 5).

Aus den ebenen Systemen lassen sich leicht räumliche ableiten durch Aufeinanderschichtung in bestimmter Art. Auch kann man, entsprechend den Polygonalsystemen, direct die Polyedralsysteme aufsuchen.



Aber alle überhaupt möglichen regelmässigen Systeme des Raumes erschöpfend aufzufinden, ist minder leicht. Erst wenn dies gelungen ist, wird es auch nöthig sein, eine Classification derselben (und implicite auch der ebenen Systeme) nach dem grösseren oder geringeren Grade ihrer Symmetrie. vorzunehmen und die Vergleichung mit den Krystallsystemen durchzuführen. Diese Aufgaben bleiben einer folgenden Abhandlung vorbehalten.

Carlsruhe, im Juli 1873.

Druckfehler.

Seite 70, **Zeile** 2 v. o. **statt** §. 21 lese **man** §. 22.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn *Mertens* an den Herausgeber.

...Wie ich hoffe, ist der folgende Nachtrag zu *Joachimsthals* vortrefflicher Arbeit: Applications des déterminants à la géometrie (dies Journal Bd. 40) von einigem Interesse.

Der Ausdruck für den Halbmesser eines Kreises, welcher drei gegebene Kreise berührt, kann wie folgt hergeleitet werden. Es seien (a_1, b_1, r_1), (a_2, b_2, r_2), (a_3, b_3, r_3), $(u, v, \mathfrak{H})$ die Coordinaten der Mittelpunkte und die Halbmesser der gegebenen und des gesuchten Kreises. Setzt man zur Abkürzung

$$(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2-(r_2-r_3)^2=\mathfrak{A},$$
$$(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2-(r_3-r_1)^2=\mathfrak{B},$$
$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-(r_1-r_2)^2=\mathfrak{C},$$
$$-\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2-\mathfrak{C}^2+2\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2\mathfrak{C}\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{D},$$
$$(-\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\mathfrak{A}r_1+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\mathfrak{B}r_2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{C}r_3=\mathfrak{E},$$
$$\begin{vmatrix} u-a_1 & v-b_1 & r_1+\mathfrak{H} \\ u-a_2 & v-b_2 & r_2+\mathfrak{H} \\ u-a_3 & v-b_3 & r_3+\mathfrak{H} \end{vmatrix}=S,$$

so ergiebt sich durch zeilenweise Multiplication

$$(1.)\quad S^2=\begin{vmatrix} u-a_1 & v-b_1 & r_1+\mathfrak{H} \\ u-a_2 & v-b_2 & r_2+\mathfrak{H} \\ u-a_3 & v-b_3 & r_3+\mathfrak{H} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_1-u & b_1-v & r_1+\mathfrak{H} \\ a_2-u & b_2-v & r_2+\mathfrak{H} \\ a_3-u & b_3-v & r_3+\mathfrak{H} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{C} & \frac{1}{2}\mathfrak{B} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{C} & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{B} & \frac{1}{2}\mathfrak{A} & 0 \end{vmatrix}=\tfrac{1}{4}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Andrerseits lassen sich S und die doppelte Fläche des von den Mittelpunkten der drei gegebenen Kreise gebildeten Dreiecks $\triangle$ bez. auf die Formen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u-a_1 & v-b_1 & r_1+\mathfrak{H} \\ 0 & u-a_2 & v-b_2 & r_2+\mathfrak{H} \\ 0 & u-a_3 & v-b_3 & r_3+\mathfrak{H} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_1-u & b_1-v & r_1+\mathfrak{H} \\ 1 & a_2-u & b_2-v & r_2+\mathfrak{H} \\ 1 & a_3-u & b_3-v & r_3+\mathfrak{H} \end{vmatrix}$$

bringen, und geben zeilenweise mit einander multiplicirt, das Resultat

$$(2.)\quad 2\triangle S = -\begin{vmatrix} 0 & r_1+\mathfrak{H} & r_2+\mathfrak{H} & r_3+\mathfrak{H} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{C} & \frac{1}{2}\mathfrak{B} \\ 1 & \frac{1}{2}\mathfrak{C} & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A} \\ 1 & \frac{1}{2}\mathfrak{B} & \frac{1}{2}\mathfrak{A} & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{D}\mathfrak{H}+\mathfrak{E}).$$

Eliminirt man aus (1.) und (2.) S, so ergiebt sich

$$(3.)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}\mathfrak{H}+\mathfrak{E} = 4\triangle\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}, \\ \mathfrak{H} = \dfrac{-\mathfrak{E}+4\triangle\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{\mathfrak{D}}. \end{cases}$$

Man erhält die Halbmesser sämmtlicher die drei gegebenen Kreise berührenden Kreise, wenn man in dem Ausdrucke (3.) r_1, r_2, r_3 mit passenden Vorzeichen behaftet.

Das nämliche Verfahren lässt den Ausdruck für den Halbmesser einer Kugel finden, welche vier gegebene Kugeln berührt. — Es seien (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (a_4, b_4, c_4, r_4), $(u, v, w, \mathfrak{H})$ die Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser der vier gegebenen und der gesuchten Kugel, ∇ der Rauminhalt des von den Mittelpunkten der gegebenen Kugeln gebildeten Vierflachs; ferner werde zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned}
(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2-(r_1-r_2)^2 &= \mathfrak{A}, \\
(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2+(c_1-c_3)^2-(r_1-r_3)^2 &= \mathfrak{B}, \\
(a_1-a_4)^2+(b_1-b_4)^2+(c_1-c_4)^2-(r_1-r_4)^2 &= \mathfrak{C}, \\
(a_3-a_4)^2+(b_3-b_4)^2+(c_3-c_4)^2-(r_3-r_4)^2 &= \mathfrak{A}', \\
(a_2-a_4)^2+(b_2-b_4)^2+(c_2-c_4)^2-(r_2-r_4)^2 &= \mathfrak{B}', \\
(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2+(c_2-c_3)^2-(r_2-r_3)^2 &= \mathfrak{C}',
\end{aligned}$$

$$-\mathfrak{A}^2\mathfrak{A}'^2-\mathfrak{B}^2\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{C}^2\mathfrak{C}'^2+2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'+2\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = L,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ 1 & \mathfrak{A} & 0 & \mathfrak{C}' & \mathfrak{B}' \\ 1 & \mathfrak{B} & \mathfrak{C}' & 0 & \mathfrak{A}' \\ 1 & \mathfrak{C} & \mathfrak{B}' & \mathfrak{A}' & 0 \end{vmatrix} = M, \qquad \begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 1 & 0 & \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ 1 & \mathfrak{A} & 0 & \mathfrak{C}' & \mathfrak{B}' \\ 1 & \mathfrak{B} & \mathfrak{C}' & 0 & \mathfrak{A}' \\ 1 & \mathfrak{C} & \mathfrak{B}' & \mathfrak{A}' & 0 \end{vmatrix} = N,$$

$$\begin{vmatrix} u-a_1 & v-b_1 & w-c_1 & r_1+\mathfrak{H} \\ u-a_2 & v-b_2 & w-c_2 & r_2+\mathfrak{H} \\ u-a_3 & v-b_3 & w-c_3 & r_3+\mathfrak{H} \\ u-a_4 & v-b_4 & w-c_4 & r_4+\mathfrak{H} \end{vmatrix} = T.$$

Multiplicirt man T zeilenweise mit der Determinante, welche aus T

durch Behaftung der Glieder der drei ersten Verticalreihen mit dem Zeichen — hervorgeht, so ergiebt sich

$$(4.)\quad T^2 = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A} & \frac{1}{2}\mathfrak{B} & \frac{1}{2}\mathfrak{C} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{A} & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{C}' & \frac{1}{2}\mathfrak{B}' \\ \frac{1}{2}\mathfrak{B} & \frac{1}{2}\mathfrak{C}' & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A}' \\ \frac{1}{2}\mathfrak{C} & \frac{1}{2}\mathfrak{B}' & \frac{1}{2}\mathfrak{A}' & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{16} L.$$

Andrerseits ist aber

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u-a_1 & v-b_1 & w-c_1 & r_1+\mathfrak{H} \\ 0 & u-a_2 & v-b_2 & w-c_2 & r_2+\mathfrak{H} \\ 0 & u-a_3 & v-b_3 & w-c_3 & r_3+\mathfrak{H} \\ 0 & u-a_4 & v-b_4 & w-c_4 & r_4+\mathfrak{H} \end{vmatrix},\ 6\nabla = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1-u & b_1-v & c_1-w & r_1+\mathfrak{H} \\ 1 & a_2-u & b_2-v & c_2-w & r_2+\mathfrak{H} \\ 1 & a_3-u & b_3-v & c_3-w & r_3+\mathfrak{H} \\ 1 & a_4-u & b_4-v & c_4-w & r_4+\mathfrak{H} \end{vmatrix},$$

woraus durch Multiplication

$$(5.)\quad 6\nabla T = \begin{vmatrix} 0 & r_1+\mathfrak{H} & r_2+\mathfrak{H} & r_3+\mathfrak{H} & r_4+\mathfrak{H} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A} & \frac{1}{2}\mathfrak{B} & \frac{1}{2}\mathfrak{C} \\ 1 & \frac{1}{2}\mathfrak{A} & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{C}' & \frac{1}{2}\mathfrak{B}' \\ 1 & \frac{1}{2}\mathfrak{B} & \frac{1}{2}\mathfrak{C}' & 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A}' \\ 1 & \frac{1}{2}\mathfrak{C} & \frac{1}{2}\mathfrak{B}' & \frac{1}{2}\mathfrak{A}' & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{8}(M\mathfrak{H} + N)$$

gefunden wird. Die Elimination von T aus (4.) und (5.) giebt

$$M\mathfrak{H} + N = 12\nabla\sqrt{L},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{-N + 12\triangle\sqrt{L}}{M}.$$

Ich habe gelegentlich den Werth der Reihe

$$\frac{l2}{2^2} + \frac{l3}{3^2} + \frac{l4}{4^2} + \cdots \text{in inf.},$$

welchen *Gauss* in den Disq. ar. art. 301 auf zehn Decimalstellen angiebt, mit aller gebotenen Sorgfalt auf weitere 17 Stellen berechnet und folgendes Resultat gefunden

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{ln}{n^2} = 0{\cdot}9375482543\ 1584375370\ 2574094.$$

Krakau, den 21. Mai 1873.

Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume.

(Von Herrn *H. Schröter* zu Breslau.)

Die allgemeine Reciprocität, d. h. die einfachste gegenseitig eindeutige (lineare) Abhängigkeit ungleichartiger Elemente, wie Punkt und Gerade, oder Punkt und Ebene, zweier gleich mächtiger Grundgebilde von einander bietet die für viele Untersuchungen wichtigen Fragen dar, ob bei der Coincidenz beider Träger entsprechende Elemente auf einander fallen, welche geometrischen Orte solche besonderen Elemente und ihre entsprechenden erfüllen, welche eigenthümliche Lage diese geometrischen Orte zu einander haben u. s. w. Für den Fall zweier auf einander liegender reciproker Ebenen sind diese Fragen wohl zuerst von *Seydewitz**) beantwortet; indessen erscheint eine Wiederaufnahme dieser Untersuchung, welche auch den dort bei Seite gelassenen imaginären Fall einschliesst, und eine dem heutigen Standpunkt der synthetischen Geometrie entsprechende Darstellung nicht überflüssig. Für den Fall reciproker Räume sind jene Fragen in den neuern Lehrbüchern von *Reye***) und *Pfaff****) nicht vollständig oder nicht ganz zutreffend erörtert worden; es soll daher im Folgenden versucht werden, diese Lücke zu ergänzen, indem die allgemeinen Eigenschaften reciproker Beziehung als bekannt vorausgesetzt werden.

A. Aufeinanderliegende reciproke ebene Gebilde.

1. Die sämmtlichen Punkte einer Ebene E constituiren ein ebenes Gebilde von gleicher Mächtigkeit mit den sämmtlichen Geraden einer anderen Ebene E_1; jene Punkte können zu diesen Geraden in eine solche gegenseitig eindeutige Abhängigkeit gesetzt werden (reciproke Beziehung), dass einem be-

*) *Seydewitz*, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projectivischer Gebilde, *Grunerts* Arch. f. Math. u. Phys. Bd. VIII. S. 1 ff.
**) *Reye*, Die Geometrie der Lage, II. Abth., Hannover 1868.
***) *Pfaff*, Neuere Geometrie, Erlangen 1867.

liebigen Punkte x der Ebene E eine bestimmte Gerade X_1 der Ebene E_1 entspricht und allen Punkten x einer beliebigen Gerade Y die sämmtlichen Strahlen X_1 eines einfachen Strahlbüschels y_1 entsprechen, welches mit jener Punktreihe projectivisch ist; dadurch werden zugleich die Geraden Y der Ebene E auf die Punkte y_1 der Ebene E_1 in derselben eindeutigen Weise bezogen. Wir gehen nicht ein auf die Construction eines beliebigen Paares von entsprechenden Elementen beider Gebilde, sobald die Beziehung durch irgend vier willkürlich gewählte Elementenpaare (wobei keine drei Punkte in einer Geraden liegen, keine drei Strahlen durch einen Punkt laufen dürfen) bestimmt wird*); vielmehr denken wir uns die Träger beider Ebenen, deren reciproke Beziehung gegeben ist, willkürlich auf einander gelegt und fragen nach solchen entsprechenden Elementen, welche in einander liegen.

Die Beantwortung dieser Frage führen wir auf einen speciellen Fall reciproker Beziehung, den Fall des Polarsystems zurück, welcher allgemein bekannt ist.**) Wenn nämlich die Träger der beiden reciproken Gebilde zusammenfallen, so haben wir in ein und derselben Ebene alle Punkte auf alle Geraden eindeutig bezogen, so dass jedem Punkte eine bestimmte Gerade entspricht und umgekehrt und einer geraden Punktreihe ein mit ihr projectivisches Strahlbüschel: einen Fall solcher Art bietet aber das gewöhnliche Polarsystem dar, bei welchem noch die im Allgemeinen *nicht* erfüllte Bedingung hinzutritt, dass jede solche Punktreihe mit dem ihr entsprechenden Strahlbüschel in involutorischer Lage sich befindet; das System sämmtlicher Pole und Polaren in Bezug auf einen (reellen oder imaginären) Kegelschnitt liefert gerade ein solches Gebilde, und umgekehrt vertritt das Polarsystem, welches sich völlig unabhängig vom Kegelschnitt construiren lässt, einen Kegelschnitt: den Ort derjenigen Punkte, deren Polaren durch sie selbst laufen, und zugleich den von allen Geraden umhüllten Ort, deren Pole auf ihnen selbst liegen; dieser in beiderlei Hinsicht identische Ort (der Kernkegelschnitt des Polarsystems) kann auch imaginär sein, während das Polarsystem reell construirbar ist, und in diesem Falle vertritt es den imaginären Kegelschnitt.

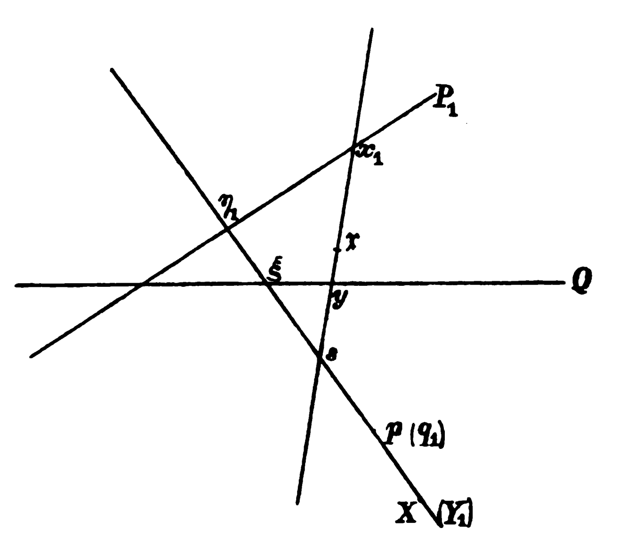
---

*) Vgl. *Moebius*, der barycentrische Calcul, fünftes Capitel.

**) *Steiners* Vorlesungen über synthetische Geometrie, Theil II., bearbeitet von *H. Schröter*. Vierter Abschnitt.

2. In zwei auf einander liegenden reciproken ebenen Gebilden, deren Träger E und E_1 sind, kann jeder Punkt und auch jede Gerade in doppeltem Sinne als der einen oder der anderen Ebene angehörig aufgefasst werden; bezeichnen wir daher eine beliebige Gerade doppelt X (Y_1), so entsprechen ihr in beiderlei Sinn im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte x_1 und y; die Verbindungslinie $x_1 y$ trifft nun den Strahl X in einem Punkte, dessen zugeordneter vierter harmonischer Punkt mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet werde. Auf diese Weise stellen wir eine neue Abhängigkeit her, indem wir jedem Strahl X der Ebene einen neuen Punkt $\mathfrak{x}$ zuordnen; die beiden entsprechenden Elemente X und $\mathfrak{x}$ liefern alsdann ein gewöhnliches Polarsystem, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht:

Drehen wir den Strahl $X(Y_1)$ um einen beliebigen in der Ebene festgehaltenen Punkt $p\,(q_1)$, so beschreibt x_1 eine bestimmte mit dem Strahlbüschel projectivische gerade Punktreihe auf dem Träger P_1 und y eine bestimmte mit demselben Strahlbüschel projectivische gerade Punktreihe auf dem Träger Q vermöge der gegegebenen reciproken Beziehung. Bezeichnen wir die Schnittpunkte:



$$(X, Q) = \xi \text{ und } (Y_1, P_1) = \eta_1,$$

dann durchlaufen ξ und x_1 projectivische Punktreihen und ebenso auch y und η_1; diese beiden projectivischen Punktreihen sind aber mit jenen beiden identisch, denn vermöge der gegebenen reciproken Beziehung entspricht dem Strahl py der Schnittpunkt (P_1, Y_1); d. h. y und η_1 sind ein Paar entsprechende Punkte derselben projectivischen Beziehung, zu welcher ξ und x_1 gehören. Durch diese beiden projectivischen Punktreihen, welche ξ und x_1 auf den Trägern Q und P_1 durchlaufen, wird nun zunächst der Ort des Schnittpunktes bestimmt:

$$(\xi\,\eta_1,\ y\,x_1) = s,$$

wo ξ und x_1, y und η_1 irgend zwei Paare entsprechender Punkte sind; er durchläuft bekanntlich eine bestimmte Gerade L*), nämlich die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte auf P_1 und Q, welche in beiderlei Sinn entsprechen dem Verbindungsstrahl von $p(q_1)$ mit dem Schnittpunkte (P_1, Q); um sodann den zu s zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}$ zu ermitteln, so dass $(x_1 y s \mathfrak{x}) = -1$ wird, müssen wir erst die Gerade $x_1 y$ bei der Bewegung verfolgen; da x_1 und ξ projectivische Punktreihen durchlaufen, ebenso η_1 und y, endlich aber ξ und η_1 perspectivische Punktreihen beschreiben, weil sie in demselben Strahlbüschel liegen, so müssen auch y und x_1 projectivische Punktreihen erzeugen; also umhüllt $y x_1$ einen Kegelschnitt, von welchem die Träger P_1 und Q und die Gerade L, wie leicht zu erkennen ist, Tangenten sind; diese drei festen Tangenten schneiden nun die veränderliche Tangente in den Punkten x_1, y und s, zu welchen der vierte harmonische $\mathfrak{x}$ bestimmt wird; daher muss bekanntlich**) der Ort von $\mathfrak{x}$ eine vierte feste Tangente $\mathfrak{P}$ desselben Kegelschnitts sein, und da zwei Tangenten eines Kegelschnitts von allen übrigen in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten werden, so folgt, dass die gerade Punktreihe, welche $\mathfrak{x}$ auf dem Träger $\mathfrak{P}$ durchläuft, projectivisch ist mit dem Strahlbüschel, welches X um p beschreibt.

Das von dem Strahl X bei der Drehung um p beschriebene Strahlbüschel und die von $\mathfrak{x}$ auf dem Träger $\mathfrak{P}$ durchlaufene projectivische Punktreihe befinden sich in involutorischer Lage; ziehen wir nämlich jetzt den Strahl $p\mathfrak{x}$, welcher die drei Geraden

$$\begin{matrix} Q & P_1 & L \\ \zeta & \tau_1 & r \end{matrix} \text{ respective in}$$

treffen möge, dann finden sich die entsprechenden Punkte z_1 und t durch folgende Construction:

$$(\zeta x_1, L) = u \quad (u\xi, P_1) = z_1$$
$$(z_1 r, Q) = t;$$

denn es müssen die drei Punkte:

---

*) *Steiners* Vorlesungen II., Seite 90.
**) A. a. O., Seite 125.

$$(\xi \eta_1, y x_1) = s,$$
$$(\zeta x_1, \xi z_1) = u,$$
$$(\zeta \tau_1, t z_1) = r$$

auf derselben Geraden L liegen; sind die Punkte z_1 und t hiernach bestimmt, so haben wir zu dem Schnittpunkte $r = (\zeta \tau_1, t z_1)$ den zugeordneten vierten harmonischen aufzusuchen und nachzusehen, ob derselbe auf dem ursprünglichen Strahle $X (Y_1)$ liegt; dann müsste involutorische Lage stattfinden. Nun sind aber nach der Construction die vier Punkte harmonisch:

$$(y x_1 s \mathfrak{r}) = -1,$$

also auch die Verbindungsstrahlen derselben mit dem Punkte ζ, d. h.

$$\zeta (y x_1 s \mathfrak{r}) = -1$$

oder

$$\zeta (y u s r) = -1,$$

und da die Punkte $s u r$ auf der Geraden L liegen, so sind die vier Punkte harmonisch:

$$(Q, L) \qquad u \qquad s \qquad r,$$

also auch die Verbindungsstrahlen derselben mit dem Punkte ξ, d. h. die Strahlen:

$$\xi (t z_1 \eta_1 r) = -1;$$

da nun die drei Punkte $t z_1 r$ auf demselben Strahle liegen, so sind die vier Punkte harmonisch:

$$t \qquad z_1 \qquad r \qquad (\xi \eta_1, t z_1)$$

oder

$$t \qquad z_1 \qquad r \qquad (X, t z_1),$$

d. h. der vierte zu r zugeordnete harmonische Punkt liegt auf dem anfänglichen Strahl X, wie z. b. w.

Wir haben nun durch unsere obige Construction eine derartige Beziehung hergestellt, dass wir zu jeder beliebigen Geraden X einen bestimmten Punkt $\mathfrak{r}$ zugeordnet haben von der Art, dass wenn X sich um irgend einen Punkt p dreht und ein Strahlbüschel beschreibt, der Punkt $\mathfrak{r}$ auf einer bestimmten Geraden $\mathfrak{P}$ eine mit dem Strahlbüschel projectivische Punktreihe beschreibt und diese Punktreihe mit jenem Strahlbüschel in involutorischer

Lage sich befindet; daraus folgt, dass X und $\mathfrak{x}$ ein Polarsystem constituiren, d. h. Pol und Polare in Bezug auf einen gewissen (reellen oder imaginären) Kernkegelschnitt sind. Die Tangenten dieses Kernkegelschnitts $K^{(3)}$ sind nun solche ausgezeichneten Strahlen $X(Y_1)$, deren Pole $\mathfrak{x}$ in Bezug auf das bekannte Polarsystem in ihnen selbst liegen, und wenn von vier harmonischen Punkten $s\,\mathfrak{x}\,x_1\,y$ zwei zugeordnete zusammenfallen, so muss in diesen auch einer der beiden andern zugeordneten hineinfallen, also entweder x_1 oder y; jede Tangente dieses Kernkegelschnitts $K^{(3)}$ besitzt also die Eigenschaft, dass der in dem einen oder dem andern Sinne ihr vermöge der gegebenen Reciprocität entsprechende Punkt in ihr selbst liegt; wenn nun x_1 in X liegt, und wir fassen X als Y_1 auf, so muss auch y in demselben Strahle liegen, denn da x_1 auf Y_1 liegt, so muss auch X durch y gehen; wir sehen also, dass in diesem Falle beide dem doppelt aufgefassten Strahle $X(Y_1)$ entsprechenden Punkte x_1 und y in ihm selbst liegen; der Punkt $\mathfrak{x}$ ist der Berührungspunkt mit dem Kernkegelschnitt $K^{(3)}$; der Punkt s ist, obwohl scheinbar unbestimmt, der vierte harmonische zu x_1, y und $\mathfrak{x}$; wir werden später seinen Ort bestimmen (5.). Das erlangte Resultat lässt sich nunmehr folgendermaassen zusammenfassen:

In der Ebene der beiden zusammenfallenden reciproken ebenen Gebilde giebt es im Allgemeinen unendlich viele Strahlen von solcher Beschaffenheit, dass die ihnen in dem einen und im andern Sinne entsprechenden Punkte in ihnen selbst liegen; diese Strahlen umhüllen einen bestimmten Kegelschnitt $K^{(3)}$, den Kernkegelschnitt eines Polarsystems, welches auf folgende Art construirt wird: Irgend einem Strahle der auf einander liegenden reciproken Gebilde in doppeltem Sinne aufgefasst $X(Y_1)$ entsprechen im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte x_1 und y, deren Verbindungslinie den Strahl in einem Punkte s trifft, dessen zugeordneter vierter harmonischer $\mathfrak{x}$ sei; dann constituiren X und $\mathfrak{x}$ das gesuchte Polarsystem als Polare und Pol. Wenn auf dem Strahle $X(Y_1)$ der entsprechende Punkt x_1 liegt, so liegt auch der entsprechende Punkt y auf ihm. Hat das Polarsystem einen reellen Kernkegelschnitt, so sind jene besonderen Strahlen reell vorhanden; ist der Kernkegelschnitt imaginär, so sind auch jene besonderen Strahlen sämmtlich imaginär.

3. Ganz ebenso wie wir von einem beliebigen Strahle $X(Y_1)$ und

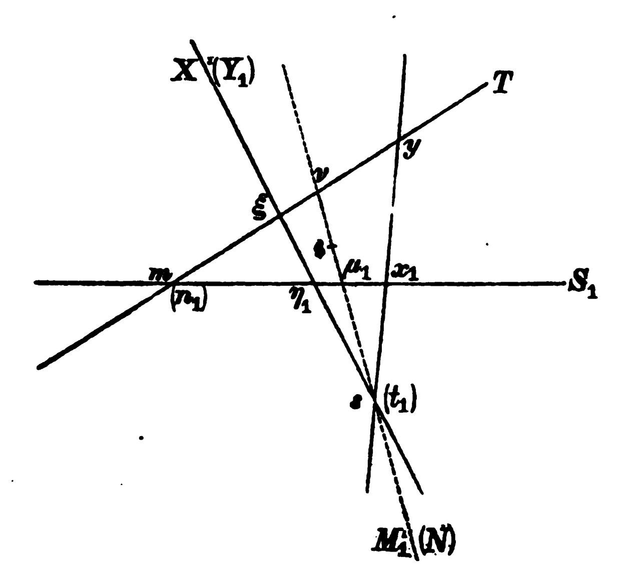
den beiden ihm entsprechenden Punkten x_1 und y in der vorigen Betrachtung ausgingen, können wir andererseits von einem beliebigen Punkte in doppelter Auffassung $x(y_1)$ und den beiden ihm entsprechenden Strahlen X_1 und Y ausgehen, den vierten harmonischen durch den Schnittpunkt derselben gehenden Strahl $\mathfrak{X}$ construiren, welcher zugeordnet ist zu dem Verbindungsstrahl mit $x(y_1)$; wir erhalten durch ganz gleichlaufende Betrachtungen ein entsprechendes Resultat, welches folgendermaassen lauten muss:

In der Ebene der beiden zusammenfallenden reciproken ebenen Gebilde giebt es im Allgemeinen unendlich viele Punkte von solcher Beschaffenheit, dass die ihnen in dem einen und andern Sinne entsprechenden Strahlen durch sie selbst laufen: diese Punkte liegen auf einem Kegelschnitt $k^{(2)}$, *dem Kernkegelschnitt eines Polarsystems, welches auf folgende Art construirt wird: Irgend einem Punkte der beiden auf einander liegenden reciproken Gebilde in doppeltem Sinne aufgefasst* $x(y_1)$ *entsprechen im Allgemeinen zwei verschiedene Strahlen* X_1 *und* Y; *verbindet man den Schnittpunkt derselben mit dem angenommenen Punkte und construirt den vierten diesem Strahle zugeordneten harmonischen Strahl* $\mathfrak{X}$, *so constituiren* x *und* $\mathfrak{X}$ *als Pol und Polare das gesuchte Polarsystem. Wenn durch den doppelt aufgefassten Punkt* $x(y_1)$ *der entsprechende Strahl* X_1 *geht, so geht auch der entsprechende Strahl* Y *durch ihn. Je nachdem das so bestimmte Polarsystem einen reellen Kernkegelschnitt hat oder nicht, sind alle diese besonderen Punkte reell oder imaginär.*

Die beiden oben construirten Polarsysteme oder die ihnen zu Grunde liegenden Kernkegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ sind keineswegs identisch, haben aber eine eigenthümliche Lage zu einander, die wir später erkennen werden (4.). Sind beide Kegelschnitte reell, *so schneidet jede Tangente von* $K^{(2)}$ *den Kegelschnitt* $k^{(2)}$ *in denjenigen beiden Punkten, welche ihr in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung entsprechen, und die aus jedem Punkte des Kegelschnitts* $k^{(2)}$ *an den Kegelschnitt* $K^{(2)}$ *gelegten Tangenten sind die beiden Strahlen, welche dem angenommenen Punkte in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung entsprechen.* Dass die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ gleichzeitig reell oder imaginär sind, ist selbstverständlich, weil der Kegelschnitt $k^{(2)}$ nichts anderes ist, als der Ort derjenigen Punkte, welche den Tangenten des Kegel-

schnitts $K^{(2)}$ in dem einen oder dem andern Sinne der gegebenen reciproken Beziehung entsprechen und auch umgekehrt.

4. Gehen wir wiederum wie in 2. von einem beliebigen Strahle in der Ebene beider Gebilde aus und bezeichnen denselben in doppelten Sinne der reciproken Beziehung durch $X(Y_1)$, die beiden ihm entsprechenden Punkte durch x_1 und y, bestimmen den Schnittpunkt s der Verbindungslinie $x_1 y$ mit dem anfänglichen Strahl und denken uns nun diesen Strahl nicht um einen beliebigen Punkt $p(q_1)$ sondern um den besonderen Punkt s gedreht, den wir im andern Sinne mit t_1 bezeichnen wollen, so werden sich x_1 und y auf zwei bestimmten Geraden S_1 und T bewegen und zwei mit dem Strahlbüschel projectivische Punktreihen beschreiben; seien ferner die Schnittpunkte wiederum:



$$(T, X) = \xi, \quad (S_1, Y_1) = \eta_1,$$

so durchlaufen ebenfalls ξ und x_1 dieselben beiden projectivischen Punktreihen wie y und η_1, aber weil der Strahl $\xi\eta_1$ um den festgehaltenen Punkt

$$(\xi\eta_1, x_1 y)$$

sich dreht und bei der Bewegung dieser Punkt auf einer und derselben nur von der gegebenen projectivischen Beziehung abhängigen Geraden zu bleiben gezwungen ist, so bleibt dieser Punkt $(\xi\eta_1, x_1 y)$ immer derselbe $s(t_1)$; dies folgt auch daraus, dass bei der Drehung des Strahls $X(Y_1)$ um diesen besonderen Punkt $s(t_1)$ das von X beschriebene Strahlbüschel mit der von x_1 durchlaufenen Punktreihe in involutorischer Lage sich befindet, denn dem Strahle sy entspricht der Schnittpunkt $(S_1 Y_1)$ und dem Strahle $t_1 x_1$, welcher mit sy identisch ist, entspricht im andern Sinne (T, X); folglich ist die involutorische Lage erwiesen und daraus folgt wieder, dass die projectivischen

Punktreihen x_1 und y perspectivisch liegen müssen; denn bezeichnen wir den Schnittpunkt (S_1, T) mit m und im andern Sinne mit n_1, so wird dem Strahl sm ein Punkt μ_1 auf S_1 entsprechen, und wegen der involutorischen Lage muss dem Strahl $s\mu_1$ im ersten Sinne der Punkt n_1 im andern entsprechen; folglich fallen in $m(n_1)$ zwei entsprechende Punkte der beiden projectivischen Punktreihen y und x_1 zusammen, mithin liegen diese perspectivisch; bezeichnen wir noch mit ν den Schnittpunkt von $s\mu_1$ und T, so zeigt sich eine besondere Eigenschaft des Punktes $m(n_1)$: *ihm entspricht nämlich in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung eine und dieselbe Gerade* $\mu_1\nu$, welche wir demgemäss mit $M_1(N)$ bezeichnen.

Dieses ausgezeichnete Elementenpaar, welches wir soeben ermittelt haben: $m(n_1)$ und $M_1(N)$, und welches die charakteristische Eigenschaft besitzt, in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung gleichzeitig sich entsprechende Elemente zu bilden, ist nach der obigen Construction ein Paar Pol und Polare für beide vorhin ermittelten Polarsysteme oder für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ gleichzeitig; aber noch mehr: nehmen wir den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{s}$ zu $s\mu_1\nu$, welcher dem s zugeordnet ist, so müssen der Punkt s und die Gerade $m\mathfrak{s}$ Pol und Polare für den Kegelschnitt $k^{(2)}$ sein, folglich muss auch der Punkt $\mathfrak{s}$ Pol sein der Geraden ms in Beziehung auf den Kegelschnitt $k^{(2)}$ (oder das ihn vertretende Polarsystem), d. h. wenn wir zu $\mathfrak{s}$ die ihm in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung entsprechenden Strahlen, welche durch $m(n_1)$ gehen müssen, construiren und den dem $\mathfrak{s}$ zugeordneten vierten harmonischen Strahl bestimmen, so muss derselbe durch s gehen, oder wenn wir zu $m\mathfrak{s}$ die in beiderlei Sinn ihm entsprechenden Punkte auf $M_1(N)$ bestimmen und den zugeordneten vierten harmonischen Punkt, so muss derselbe mit s coincidiren, d. h. der Punkt $\mathfrak{s}$ und die Gerade ms sind zugleich Pol und Polare für den andern Kegelschnitt $K^{(2)}$, also für beide Kegelschnitte gleichzeitig; die beiden Punkte s und $\mathfrak{s}$ sind also conjugirte Punkte und ebenso natürlich die beiden Strahlen ms und $m\mathfrak{s}$ conjugirte Strahlen für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ gleichzeitig.

Nehmen wir auf dem ermittelten Strahle $M_1(N)$ irgend einen andern Punkt $s(t_1)$, so ändern sich auch S_1 und T, schneiden sich aber nothwendig in demselben Punkte $m(n_1)$, weil dieser der Geraden $M_1(N)$ in doppeltem Sinne entspricht; es ändert sich auch $\mathfrak{s}$, der vierte harmonische Punkt, aber

die vorige Eigenschaft, dass s und $\mathfrak{s}$ conjugirte Punkte sein müssen für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ gleichzeitig, lässt sich in derselben Art erweisen. Wir sehen also, dass nicht nur $m(n_1)$ und $M_1(N)$ Pol und Polare für beide Kegelschnitte gleichzeitig sind, sondern dass auch die beiden Punktsysteme $(s, \mathfrak{s})$, welche der Geraden $M_1(N)$ in Bezug auf beide Kegelschnitte zugehören, identisch sind und daher ebenso die beiden Strahlsysteme, welche dem Punkte $m(n_1)$ in Bezug auf beide Kegelschnitte zugehören, zusammenfallen. Wir haben also folgendes Resultat:

Die beiden Polarsysteme, deren Kernkegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ sind, haben ein ausgezeichnetes Paar $m(n_1)$ und $M_1(N)$ als Pol und Polare gemeinschaftlich, und es fallen ebensowohl die beiden Strahlsysteme, welche dem Punkte $m(n_1)$ in beiden Polarsystemen zugehören, zusammen, wie die beiden Punktsysteme auf der Geraden $M_1(N)$, welche den beiden Polarsystemen zugehören, identisch sind. Sind die beiden Kernkegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ reell, so haben sie also eine (reelle oder ideelle) doppelte Berührung).* Der Schnittpunkt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten $m(n_1)$ und die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte $M_1(N)$ sind immer reell.

5. Das im Vorigen ermittelte ausgezeichnete Paar sich in doppelter Weise entsprechender Elemente $m(n_1)$ und $M_1(N)$ ist einzig in seiner Art. Wir haben es construirt, indem wir von einem beliebigen Strahl $X(Y_1)$ ausgingen, den Schnittpunkt $s(t_1)$ desselben mit der Verbindungslinie $x_1 y$ aufsuchten und zu $s(t_1)$ die beiden entsprechenden Strahlen S_1 und T ermittelten, welche sich in dem Punkte $m(n_1)$ treffen, dem in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung eine und dieselbe Gerade $M_1(N)$ entspricht. Ist nun diese Gerade $M_1(N)$ einmal gefunden, so wird irgend eine andere Gerade $X'(Y'_1)$ ihr in einem Punkte $s'(t'_1)$ begegnen, und die beiden entsprechenden Strahlen S'_1 T' werden sich in dem früheren Punkte $m(n_1)$ schneiden müssen; denken wir uns zu dem Strahl $X'(Y'_1)$ die beiden entsprechenden Punkte x'_1 und y' auf den Trägern S'_1 und T' ermittelt, so muss das Doppelverhältniss der vier Punkte:

$$n_1 \qquad (S'_1 Y'_1) \qquad (S'_1 M_1) \qquad x'_1$$

dasselbe sein, wie das der vier entsprechenden Strahlen:

*) *Steiners* Vorlesungen II. S. 364.

$$N \quad s'y' \quad s'm \quad X'$$

oder anders gestellt:

$$s'm \quad X' \quad N \quad s'y' \quad ;$$

da aber der Strahl $s'm$ durch n_1 geht, der Strahl X' mit Y'_1 und der Strahl N mit M_1 zusammenfällt, so muss auch der Strahl $s'y'$ durch x'_1 gehen, d. h. die Verbindungslinie $x'_1 y'$ trifft den Strahl $X'(Y'_1)$ in einem Punkte der Geraden $M_1(N)$; wir haben hiernach folgenden Satz:

Wenn man in dem ganzen Gebiet der beiden auf einander liegenden reciproken Ebenen zu jedem beliebigen Strahl in doppeltem Sinn aufgefasst $X(Y_1)$ die beiden ihm entsprechenden Punkte x_1 und y aufsucht, so trifft die Verbindungslinie $x_1 y$ jenen Strahl in einem Punkte s, dessen gesammter Ort eine und dieselbe feste Gerade $M_1(N)$ ist, welcher in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung ein und derselbe Punkt $m(n_1)$ entspricht. Dreht man den Strahl $X(Y_1)$ um einen und denselben Punkt s der Geraden $M_1(N)$, so läuft auch die Verbindungslinie $x_1 y$ immer durch diesen Punkt und die dadurch erhaltenen Strahlenpaare bilden ein Strahlensystem.

Diesem Resultat steht ein ganz gleichlaufendes zur Seite, welches zwar schon aus der Reciprocität folgt, aber auch in gleicher Weise abgeleitet werden kann:

Ist der ausgezeichnete Punkt $m(n_1)$ auf die oben angegebene Weise gefunden und wir nehmen einen beliebigen Punkt, den wir in doppeltem Sinne als $x(y_1)$ bezeichnen und dessen beide entsprechenden Geraden X_1 und Y seien, während dem Punkte $m(n_1)$ dieselbe Gerade $M_1(N)$ in doppeltem Sinne entspricht; verbinden wir dann die beiden Punkte $m(n_1)$ und $x(y_1)$ durch eine Gerade, welche wir mit $P(Q_1)$ bezeichnen wollen, dann sind die ihr in beiderlei Sinn entsprechenden Punkte die Schnittpunkte:

$$p_1 = (M_1,\ X_1), \quad q = (N,\ Y).$$

Nun entsprechen den vier Strahlen des durch p_1 gehenden Strahlbüschels:

$$p_1 n_1\,, \quad p_1 y_1\,, \quad M_1\,, \quad X_1$$

die vier Punkte:

$$(P,\ N)\,, \quad (P,\ Y)\,, \quad m\,, \quad x$$

oder anders gestellt (wobei die Gleichheit der Doppelverhältnisse bestehen bleibt):

$$m, \quad x, \quad (P,N), \quad (P,Y).$$

Da nun die Doppelverhältnisse dieser vier entsprechenden Paare gleich sind und der Strahl $p_1 n_1$ durch m geht, der Strahl $p_1 y_1$ durch x, der Strahl M_1 durch (P,N), so muss auch der Strahl X_1 durch (P,Y) gehen, d. h. der Schnittpunkt (X_1, Y) liegt auf der Verbindungslinie der Punkte $x(y_1)$ und $m(n_1)$. Das Weitere ist selbstverständlich, daher haben wir den Satz:

Wenn man in dem ganzen Gebiet der beiden auf einander liegenden reciproken Ebenen zu jedem beliebigen in doppeltem Sinne aufgefassten Punkt $x(y_1)$ *die beiden ihm entsprechenden Strahlen* X_1 *und* Y *aufsucht und den Schnittpunkt derselben mit dem angenommenen Punkte verbindet, so laufen alle diese Verbindungslinien durch einen und denselben festen Punkt* $m(n_1)$, *welchem in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung dieselbe Gerade* $M_1(N)$ *entspricht. Rücken wir den willkürlich gewählten Punkt* $x(y_1)$ *auf einem durch* $m(n_1)$ *gehenden Strahl fort, so bleibt auch der Schnittpunkt* (X_1, Y) *beständig auf diesem Strahl und die dadurch erhaltenen Punktenpaare bilden ein Punktsystem.*

Ist ein solches Punktsystem hyperbolisch, so sind offenbar die beiden Asymptotenpunkte desselben Punkte des Kegelschnitts $k^{(3)}$, also hängen die auf sämmtlichen durch den Punkt $m(n_1)$ gehenden Strahlen bestimmten Punktsysteme in der Weise zusammen, dass ihre Asymptotenpunkte den Kegelschnitt $k^{(3)}$ erfüllen, und anderseits werden die Asymptoten aller derjenigen Strahlsysteme, welche wir oben für die Punkte s der Geraden $M_1(N)$ construirt haben, die sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts $K^{(3)}$ sein. Wir haben dadurch die beiden Kegelschnitte $k^{(3)}$ und $K^{(3)}$ noch in anderer Weise definirt, als durch die früher construirten Polarsysteme.

6. Ausser dem einen von uns ermittelten Paare ausgezeichneter in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung sich entsprechender Elemente $m(n_1)$ und $M_1(N)$ giebt es im Allgemeinen noch zwei andere Paare von gleicher Beschaffenheit aber von eigenthümlicher Lage, welche entweder beide reell oder beide imaginär sind. Das Strahlsystem nämlich, welches dem Punkte $m(n_1)$ für beide Polarsysteme gleichzeitig zugehört, hat im Allgemeinen zwei Asymptoten (reelle, wenn es hyperbolisch ist, und imaginäre, wenn es elliptisch ist) und anderseits hat das Punktsystem auf der Geraden $M_1(N)$, welches beiden Polarsystemen gemeinsam zugehört, zwei Asymptotenpunkte;

da aber $m(n_1)$ und $M_1(N)$ selbst Pol und Polare für das Polarsystem sind, so liegt bekanntlich jenes Strahlsystem mit diesem Punktsystem perspectivisch, d. h. jene beiden Asymptoten gehen durch diese beiden Asymptotenpunkte hindurch, oder wenn wir den reellen Fall vor Augen haben: die beiden Asymptoten sind die gemeinschaftlichen Tangenten, die beiden Asymptotenpunkte die beiden Berührungspunkte der einander doppelt berührenden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$. Jede der beiden Tangenten und der auf ihr liegende Berührungspunkt sind daher solche besonderen Elemente, welche sich rücksichtlich der gegebenen reciproken Beziehung in doppeltem Sinne entsprechen, und haben dieselbe besondere Eigenschaft, wie das oben gefundene Paar $m(n_1)$ und $M_1(N)$ mit dem Unterschied, dass bei jedem dieser Paare der Punkt in dem ihm in doppeltem Sinne entsprechenden Strahle selbst liegt.

Mehr als diese drei Paare ausgezeichneter Elemente, welche in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung sich gleichzeitig entsprechen, kann es im Allgemeinen nicht geben; denn gäbe es noch ein solches Paar, so müsste dies auch ein Paar Pol und Polare für beide oben ermittelten Polarsysteme sein, und dann würden diese beiden Polarsysteme, also auch ihre Kernkegelschnitte identisch sein; es würde also jedem Punkt in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung dieselbe Gerade entsprechen. Dies ist ein besonderer Fall, welchen wir die *polare Lage* der beiden auf einander liegenden reciproken Ebenen nennen, und für den wir die nothwendige und ausreichende Bedingung aufsuchen wollen.

Sei in den beliebig auf einander gelegten reciproken ebenen Gebilden das besondere Paar ausgezeichneter Elemente $m(n_1)$ und $M_1(N)$ bestimmt, welche ausser einander liegend in doppeltem Sinne der reciproken Beziehung sich gleichzeitig entsprechen, und drehen wir jetzt um den Punkt $m(n_1)$ einen beliebigen Strahl $X(Y_1)$, so durchlaufen die entsprechenden Punkte x_1 und y auf derselben Geraden $M_1(N)$ im Allgemeinen zwei verschiedene Punktreihen, welche mit dem von $X(Y_1)$ beschriebenen Strahlbüschel projectivisch sind. Wir haben nun oben den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}$ bestimmt, welcher von $X(Y_1)$ durch die Punkte x_1 und y harmonisch getrennt wird; dieser beschreibt bei der Bewegung von $X(Y_1)$ eine dritte projectivische Punktreihe, welche mit dem Strahlbüschel in involutorischer Lage sich befindet, und das daraus hervorgehende Strahlsystem und das

Punktsystem, die perspectivisch liegen, sind, wie wir gesehen haben, beiden Polarsystemen, deren Kernkegelschnitte $K^{(2)}$ und $k^{(2)}$ sind, gemeinschaftlich. Es könnte nun der besondere Fall eintreten, dass das Strahlbüschel X mit der Punktreihe x_1 in involutorischer Lage sich befände, dann müsste y mit x_1 zusammenfallen, folglich auch in diesen Punkt hineinfallen; es würde hiernach das Punkt- und Strahlsystem, welches X und x_1 erzeugen, identisch sein mit dem aus Y_1 und y oder aus X und x entspringenden, und wir wissen, dass die involutorische Lage bedingt ist durch ein einziges Paar verwechselt auf einander fallender entsprechender Elemente, d. h. sobald es nur einmal vorkommt, dass während dem Strahl X der Punkt x_1 entspricht, auch dem nach x_1 hingehenden Strahl im ersten Sinne der Beziehung ein auf X liegender Punkt im andern Sinne entspricht, dann jedes Mal diese involutorische Lage auftritt.

In diesem besonderen Falle wird also jedem durch $m\,(n_1)$ gezogenen Strahl $X\,(Y_1)$ ein und derselbe Punkt $x_1\,(y)$ auf der Geraden $M_1\,(N)$ entsprechen, und wir haben ausser dem ursprünglichen Paare $m\,(n_1)$ und $M_1\,(N)$ noch unendlich viele andere Paare von ganz derselben Beschaffenheit, und hieraus folgt sogleich, dass dies allgemein und immer der Fall ist. Halten wir nämlich ein beliebiges solches Paar $X\,(Y_1)$ und $x_1\,(y)$ fest [wo $X(Y_1)$ durch $m\,(n_1)$ läuft und $x_1(y)$ auf $M_1(N)$ liegt] und drehen um $x_1\,(y)$ irgend einen Strahl $Z\,(T_1)$, so durchlaufen die beiden entsprechenden Punkte z_1 und t zwei projectivische Punktreihen auf $X\,(Y_1)$; das von Z beschriebene Strahlbüschel und die von z_1 durchlaufene Punktreihe sind nicht allein projectivisch, sondern befinden sich auch in involutorischer Lage, denn dem besonderen durch $x_1\,(y)$ gehenden Strahl N entspricht der Punkt n_1 und zugleich dem nach $n_1\,(m)$ hingehenden Strahl der Schnittpunkt von $N\,(M_1)$ mit $X\,(Y_1)$; aus der involutorischen Lage dieser beiden von Z und z_1 beschriebenen Gebilde folgt nun, dass dem Strahl $Z\,(T_1)$ ein und derselbe Punkt $z_1\,(t)$ auf $X\,(Y_1)$ entsprechen muss, und da der Strahl $Z\,(T_1)$ übrigens ein ganz beliebiger ist, zu dem jede Gerade in dem ganzen Gebiet der beiden Träger gewählt werden kann, so folgt, dass jeder Geraden in doppeltem Sinne aufgefasst ein und derselbe Punkt und umgekehrt jedem beliebigen Punkt in doppeltem Sinne aufgefasst eine und dieselbe Gerade entspricht, dass also die beiden reciproken Gebilde in polarer Lage sich befinden. Wir können also das Ergebniss der Betrachtung so zusammenfassen:

Wenn in zwei auf einander liegenden reciproken ebenen Gebilden das immer reell und im Allgemeinen nur ein Mal vorhandene ausgezeichnete Elementenpaar $m(n_1)$ und $M_1(N)$, welches sich gleichzeitig in doppeltem Sinne entspricht und ausser einander liegt, die eigenthümliche Lage besitzt, dass ein um $m(n_1)$ gedrehter Strahl X und sein entsprechender Punkt x_1 auf $M_1(N)$ involutorisch liegen, dann befinden sich die beiden reciproken Gebilde in polarer Lage, d. h. jeder Geraden in der Ebene beider Träger entspricht in beiderlei Sinn ein und derselbe Punkt und jedem Punkte in beiderlei Sinn je eine und dieselbe Gerade. Dieses in dem einen oder andern Sinn aufgefasste Doppelgebilde von Punkten und Strahlen constituirt ein gewöhnliches Polarsystem, und die beiden im Allgemeinen verschiedenen Polarsysteme, welche wir oben ermittelt haben, fallen in diesem besonderen Falle zusammen.

7. Es entsteht nunmehr die Frage, ob und wie es möglich ist, *zwei gegebene reciproke ebene Gebilde mit ihren Trägern E und E_1 so auf einander zu legen, dass sie ein Polarsystem bilden?*

Wie auch die beiden Ebenen E und E_1 auf einander gelegt werden mögen, immer befinden sich die beiden unendlich entfernten Geraden derselben auf einander; wenn also polare Lage eintreten soll, so müssen auch die ihnen entsprechenden Punkte zusammenfallen; bezeichnen wir die unendlich entfernten Geraden der beiden Ebenen E und E_1 durch M^∞ und N_1^∞, entspreche der Geraden M^∞ der Ebene E der Punkt m_1^0 der Ebene E_1 und Geraden N_1^∞ der Ebene E_1 der Punkt n^0 der Ebene E; denken wir uns die Ebenen E und E_1 so auf einander gelegt, dass die besonderen Punkte m_1^0 und n^0 zusammenfallen, dann haben wir noch die Freiheit, um diesen festgehaltenen Punkt die eine oder die andere der beiden Ebenen beliebig zu drehen, ohne die Ebenen selbst von einander zu trennen; das besondere Paar sich in doppelter Hinsicht entsprechender Elemente $m_1^0(n^0)$ und $M^\infty(N_1^\infty)$ bleibt dabei unverändert bestehen; es ist nun leicht, um polare Lage zu erzielen, eine solche Drehung vorzunehmen, dass ein durch n^0 gehendes Strahlbüschel X mit der auf N_1^∞ befindlichen projectivischen Punktreihe x_1 in involutorische Lage gelangt. Denken wir uns den Mittelpunkt n^0 des Strahlbüschels X noch mit dem jedesmaligen x_1 verbunden, so erhalten wir in n^0 zwei concentrische projectivische Strahlbüschel, die auf fol-

gende Art zur involutorischen Lage gebracht werden können; es giebt bekanntlich in den beiden projectivischen Strahlbüscheln ein einziges immer reelles Paar von Schenkeln entsprechender rechter Winkel*), die wir mit s, t und s_1, t_1 bezeichnen, so dass also die Winkel:

$$(s, t) = 90^0 \text{ und } (s_1, t_1) = 90^0$$

sind; drehen wir nun die beiden Strahlbüschel um das gemeinsame Centrum $m_1^0 (n^0)$ so herum, dass s mit t_1, also auch s_1 mit t zusammenfällt, dann sind sie offenbar in involutorischer Lage, also die ebenen Gebilde in polarer Lage.

Bezeichnen wir kurz die besonderen Punkte m_1^0 und n^0, welche den unendlich entfernten Geraden der beiden reciproken Ebenen entsprechen, als die *Mittelpunkte*, die besonderen immer reellen Strahlen $s\,t$, $s_1\,t_1$ (deren Construction, wenn die reciproken ebenen Gebilde ausser einander willkürlich gegeben sind, ersichtlich ist) als die *Axen* der beiden reciproken Gebilde, so können wir das Ergebniss folgendermaassen aussprechen:

Zwei gegebene reciproke ebene Gebilde können immer dadurch in polare Lage gebracht werden, dass man ihre Mittelpunkte vereinigt und die Axen verkehrt zur Deckung bringt (s *mit* t_1 *und* s_1 *mit* t).

Dies kann, wenn man die Ebenen auch umklappen darf, offenbar in vierfacher Weise geschehen, und die daraus hervorgehenden vier Polarsysteme, deren Kernkegelschnitte harmonisch-zugeordnet sind, besitzen eigenthümliche Eigenschaften.**) Wir bemerken schliesslich noch, dass diese Ergebnisse in vollkommener Uebereinstimmung stehen mit den bekannten Betrachtungen bei Gebilden von einer Dimension; z. B. zwei allgemeine projectivische Punktreihen können immer so auf einander gelegt werden, dass ihre entsprechenden Punkte eine Involution (Punktsystem) bilden, indem nur die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte vereinigt werden. Auch lassen sich nach Analogie unserer Betrachtung bei zwei beliebig auf einander geworfenen projectivischen Punktreihen die unbekannten Doppelpunkte auf die Asymptotenpunkte eines reell construirbaren Punktsystems zurückführen, was für manche Untersuchungen nützlich ist: *Werden zwei gegebene projectivische Punktreihen auf einander gelegt,*

*) *Steiners* Vorles. II. §. 13.
**) *Steiners* Vorles. II. §. 54.

so ist jeder Punkt ihres gemeinsamen Trägers doppelt aufzufassen als $x(y_1)$, der einen oder der andern Punktreihe angehörig; in beiderlei Sinn entsprechen ihm im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte x_1 aus y; bestimmt man den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}$, durch welchen diese beiden harmonisch zu $x(y_1)$ getrennt werden, dann beschreibt bei der Veränderung das Punktepaar $x\mathfrak{x}$ ein Punktsystem (Involution), dessen Asymptotenpunkte die Doppelpunkte der beiden gegebenen projectivischen Punktreihen sind.

B. In einander liegende reciproke räumliche Gebilde.

8. Wir können die sämmtlichen Punkte eines unendlich ausgedehnten Raumes R auf die sämmtlichen Ebenen eines zweiten gleich mächtigen Raumes R_1 in einer solchen gegenseitig eindeutigen Weise beziehen, dass jedem Punkte x des ersten Raumes eine bestimmte Ebene X_1 des zweiten Raumes entspricht, während x eine beliebige Punktreihe auf einer Geraden g durchläuft, die entsprechende Ebene X_1 ein mit dieser Punktreihe projectivisches Ebenenbüschel, dessen Axe g_1 ist, beschreibt, also jeder Geraden g des Raumes R wieder eine Gerade g_1 des Raumes R_1 entspricht, endlich einer durch zwei sich schneidende Gerade g und h gelegten Ebene Y des ersten Raumes ein bestimmter Punkt y_1, der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden g_1 und h_1, entspricht (g_1 und h_1 müssen sich nämlich schneiden, weil dem Schnittpunkt (g, h) eine einzige bestimmte Ebene des Raumes R_1 entspricht, die durch g_1 und auch durch h_1 gehen muss, und da g_1 und h_1 in einer Ebene liegen, so müssen sie sich treffen); folglich werden auch den Ebenen Y des Raumes R, welche durch eine Gerade g gehen, die Punkte y_1 der entsprechenden Geraden g_1 entsprechen, und das Ebenenbüschel wird wiederum mit der Punktreihe projectivisch sein.

Eine solche Beziehung der beiden gleich mächtigen Räume R und R_1 nennt man die allgemeine reciproke Beziehung, bei der den Punkten Strahlen und Ebenen des Raumes R die Ebenen, Strahlen und Punkte des Raumes R_1 in beiderseits eindeutiger Weise entsprechen. Wir gehen auch hier nicht auf die einfache Construction entsprechender Elemente der beiden reciproken Räume näher ein, wenn die Beziehung etwa durch fünf beliebige Paare entsprechender Elemente, Punkte und Ebenen (von denen keine vier Punkte in einer Ebene liegen, keine vier Ebenen durch einen Punkt laufen

dürfen) bestimmt wird; vielmehr beschäftigen wir uns, da die Räume hier schon ihrer Natur nach ganz in einander liegen, d. h. den einzigen unserer Anschauung sich darbietenden unendlichen Raum erfüllen, nur mit der Frage, wann bei allgemein gegebener reciproker Beziehung entsprechende Elemente in einander liegen, d. h. ein Punkt in der ihm entsprechenden Ebene selbst liegt, eine Ebene durch den ihr entsprechenden Punkt geht, eine Gerade mit der ihr entsprechenden Geraden in einer Ebene liegt oder dieselbe trifft?

Wir führen auch hier die Beantwortung dieser Frage auf einen bekannten speciellen Fall solcher reciproken Beziehung, das räumliche Polarsystem, zurück, d. h. Pole und Polarebenen, conjugirte Gerade in Bezug auf eine (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung, die Kernfläche des Polarsystems; ein solches von der Realität der Kernfläche völlig unabhängiges immer reell construirbares Polarsystem hat nämlich noch die im Allgemeinen *nicht* erfüllte Eigenschaft, dass jedes Ebenenbüschel und die ihm entsprechende Punktreihe sich in involutorischer Lage befinden; die Kernfläche des Polarsystems erscheint als der Ort derjenigen Punkte, deren Polarebenen durch sie selbst gehen, oder als umhüllt von denjenigen Ebenen, deren Pole in ihnen selbst liegen, oder endlich als der Ort der Schnittpunkte solcher conjugirten Strahlen, welche sich treffen, und zugleich umhüllt von den Ebenen, in welchen sich zwei conjugirte Strahlen treffen; aber auch wenn die Kernfläche imaginär ist, ist das Polarsystem immer reell construirbar und vertritt in diesem Falle die imaginäre Fläche zweiter Ordnung.*)

9. In den beiden einander durchdringenden reciproken Räumen kann jeder Punkt, jede Gerade und jede Ebene in doppeltem Sinne aufgefasst werden, sowohl dem einen, als auch dem andern Raume angehörig; bezeichnen wir daher eine beliebige Ebene, doppelt aufgefasst, durch $X(Y_1)$, so werden ihr im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte x_1 und y entsprechen; der Schnittpunkt der Verbindungslinie $x_1 y$ mit der angenommenen Ebene $X(Y_1)$ heisse s und der zu s zugeordnete vierte harmonische Punkt, durch

---

*) Vgl. Dr. *G. Beyer*: Untersuchungen über das räumliche Polarsystem, Inaugural-Dissertation, Breslau 1868.

welchen $x_1 y$ harmonisch getrennt werden, heisse $\mathfrak{x}$. Auf diese Weise stellen wir eine neue reciproke Beziehung her, indem wir zu jeder Ebene X den so construirten Punkt $\mathfrak{x}$ zuordnen; diese entsprechenden Elemente X und $\mathfrak{x}$ bilden alsdann ein gewöhnliches räumliches Polarsystem, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht:

Drehen wir die willkürlich gewählte Ebene $X(Y_1)$ um eine beliebige in ihr festgehaltene Gerade $g(h_1)$, so durchlaufen die entsprechenden Punkte x_1 und y zwei mit dem Ebenenbüschel projectivische Punktreihen, deren Träger im Allgemeinen zwei sich im Raume nicht treffende Gerade g_1 und h sein werden; suchen wir zunächst den Ort des Punktes s bei dieser Bewegung auf und sodann den Ort von $\mathfrak{x}$. Die Ebene $X(Y_1)$ schneidet die beiden Träger g_1 und h selbst in zwei Punkten, die wir beziehlich mit

$$(X, h) = \xi, \qquad (Y_1; g_1) = \eta_1$$

bezeichnen wollen, dann beschreiben sowohl ξ und x_1, als auch y und η_1 je zwei projectivische Punktreihen, die aber mit einander idéntisch sind, denn vermöge der gegebenen reciproken Beziehung muss der Ebene gy der Schnittpunkt $(g_1 Y_1)$, d. h. der Punkt η_1 entsprechen; es gehören also y und η_1 zu derselben projectivischen Beziehung, zu welcher ξ und x_1 gehören; wir haben daher nur zwei projectivische Punktreihen ξ und x_1 auf den beiden Trägern h und g_1 zu verfolgen, die wir als gegeben ansehen dürfen.

Verbinden wir jetzt einen beliebigen Punkt p der Geraden $g(h_1)$ mit den beiden bekannten projectivischen Punktreihen ξ und x_1, so erhalten wir in p zwei projectivische ebene Strahlbüschel in verschiedenen Ebenen, deren entsprechende Strahlen $p\xi$ und px_1 sind; die beiden Strahlbüschel haben einen Strahl gemeinschaftlich, die Schnittlinie der Ebenen (p, h) und (p, g_1), welche von p nach dem scheinbaren Durchschnittspunkt der Träger h und g_1 hingeht; nennen wir die Punkte, in welchen dieser gemeinsame Strahl die Träger trifft, e und f_1, die ihnen durch die gegebene projectivische Beziehung entsprechenden Punkte e_1 und f, und irgend zwei andere Paare entsprechender Punkte auf den Trägern h und g_1 mögen ξ und x_1, y und η_1 heissen, wo unter dem letzteren Paar das obige verstanden werden kann oder auch nicht; dann sind in beiden Strahlbüscheln die Doppelverhältnisse einander gleich:

$$p\,(e\,f\,\xi\,y) = p\,(e_1\,f_1\,x_1\,\eta_1) \text{ oder}$$
$$= p\,(f_1\,e_1\,\eta_1\,x_1);$$

nun ist aber $p\,e\,f_1$ ein und derselbe Strahl, folglich muss perspectivische Lage eintreten oder die drei Ebenen:

$$p\,f\,e_1 \qquad p\,\xi\,\eta_1 \qquad p\,y\,x_1$$

müssen sich in einer Geraden schneiden, welche durch p geht. Hieraus folgt umgekehrt, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen $p\,\xi\,\eta_1$ und $p\,y\,x_1$, wie übrigens auch die willkürlich gewählten Paare entsprechender Punkte ξ und x_1, y und η_1 angenommen werden mögen, in einer und derselben festen Ebene $p\,f\,e_1$ liegen muss; diese feste Ebene, deren Construction oben angegeben ist, hängt nur ab von dem Punkte p und den gegebenen projectivischen Punktreihen; wir können dies Resultat noch etwas anders aussprechen:

Sind auf zwei sich nicht schneidenden Geraden im Raume h und g_1 als Trägern zwei bestimmte projectivische Punktreihen ξ und x_1 gegeben und man legt durch einen beliebigen festen Punkt p des Raumes eine veränderliche Ebene, welche die beiden Träger respective in ξ und η_1 trifft, deren entsprechende Punkte x_1 und y sind, dann schneidet die durch p x_1 y gelegte Ebene die erste Ebene in einem veränderlichen Strahl, welcher sich in einer und derselben festen Ebene um p dreht.

Nehmen wir jetzt einen zweiten Punkt p' auf der ursprünglichen Geraden $g\,(h_1)$ und stellen dieselbe Betrachtung an, so erhalten wir ein gleiches Resultat und eine bestimmte durch p' gehende Ebene als Ort der Schnittlinien je zweier Ebenen $p'\,\xi\,\eta_1$ und $p'\,y\,x_1$. Fassen wir aber nur das einfache Ebenenbüschel auf, welches durch p und p' gleichzeitig geht und dessen Axe $g\,(h_1)$ ist, so werden die beiden Ebenen $p\,x_1\,y$ und $p'\,x_1\,y$, deren Schnittlinie $x_1\,y$ ist, die veränderliche Ebene des Büschels, welche in ξ und η_1 den Trägern begegnet, in je einem solchen Punkte treffen müssen, dessen gesammter Ort gemeinschaftlich ist den beiden vorigen festen Ebenen, d. h. eine bestimmte feste Gerade ist; der gesuchte Ort unseres Punktes s ist daher eine gewisse Gerade l im Raume, deren Lage noch näher dadurch bestimmt wird, dass sie eine Generatrix desjenigen Hyperboloids ist, welches von allen Verbindungsstrahlen $x_1\,y$ erzeugt wird; in der That, da die Punkte ξ und x_1 projectivische Punktreihen auf den Trägern h und g_1 bilden,

ebenso η_1 und y projectivisch sind, ξ und η_1 aber perspectivisch in demselben Ebenenbüschel liegen, so müssen auch y und x_1 projectivische Punktreihen durchlaufen, also wird ihre Verbindungslinie eine Regelschaar eines Hyperboloids bilden; da der Punkt s des veränderlichen Strahls $y\,x_1$ ein Gerade l durchläuft, so muss dieselbe eine Generatrix der zweiten Schaar sein, welcher die Träger g_1 und h angehören, wir haben also zunächst dies Resultat:

Wird in den beiden reciproken Räumen eine doppelt aufgefasste Ebene $X(Y_1)$ um eine beliebige Axe $g\,(h_1)$ gedreht, so durchlaufen die entsprechenden Punkte x_1 und y zwei mit dem Ebenenbüschel projectivische gerade Punktreihen auf den Trägern g_1 und h; die Verbindungslinie $x_1\,y$ erzeugt eine Regelschaar eines Hyperboloids und trifft die jedesmalige anfängliche Ebene $X(Y_1)$ in einem Punkte s, dessen gesammter Ort eine bestimmte Gerade l ist, die eine Generatrix der zweiten Regelschaar des vorigen Hyperboloids ist, welcher die Träger g_1 und h angehören.

Wir haben nunmehr den vierten harmonischen, zu s zugeordneten Punkt $\mathfrak{x}$ aufzusuchen, durch welchen x_1 und y harmonisch getrennt werden mit s, d. h. für den das Doppelverhältniss $(x_1\,y\,s\,\mathfrak{x}) = -1$ ist.

Denken wir uns vollständig das Hyperboloid $H^{(2)}$ hergestellt, auf welchem $x_1\,y$ eine Regelschaar durchläuft, während $h\,g_1$ und l drei Generatrices der andern Regelschaar sind, construiren wir auf der Generatrix $x_1\,y\,s$ den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}$ und auf einer zweiten Generatrix derselben Schaar $x'_1\,y'\,s'$ den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}'$, so wird die Verbindungslinie $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ ganz auf dem Hyperboloid $H^{(2)}$ liegen müssen und eine Generatrix der andern Schaar sein; denn da irgend zwei Generatrices einer Schaar des Hyperboloids von den sämmtlichen Generatrices der andern Schaar in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten werden und die Doppelverhältnisse $(x_1\,y\,s\,\mathfrak{x})$ und $(x'_1\,y'\,s'\,\mathfrak{x}')$ einander gleich sind, weil beide -1 sind, so ist $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ eine Generatrix des Hyperboloids $H^{(2)}$, die wir $\mathfrak{g}$ nennen wollen; nun werden aber alle übrigen Generatrices der ersten Schaar von diesen vieren $h\,g_1\,l\,\mathfrak{g}$ auch in gleichen Doppelverhältnissen geschnitten, die also hier immer harmonische Verhältnisse (-1) sind; folglich ist der Ort aller vierten harmonischen Punkte $\mathfrak{x}$ die Gerade $\mathfrak{g}$ und der Punkt $\mathfrak{x}$, welcher auf dieser

Geraden sich bewegt, beschreibt eine Punktreihe, die mit x_1, also auch mit dem ursprünglichen Ebenenbüschel $X(Y_1)$ projectivisch ist; es bleibt jetzt noch nachzuweisen, dass das Ebenenbüschel, welches die Ebene $X(Y_1)$ beschreibt, und die gerade Punktreihe, welche $\mathfrak{x}$ durchläuft, in involutorischer Lage sich befinden. Dies können wir in Kürze folgendermaassen nachweisen:

Legen wir durch die Axe $g(h_1)$ und den gefundenen Punkt $\mathfrak{x}$ eine Ebene (Z, T_1), welche die Geraden:

$$\begin{matrix} h & g_1 \\ \zeta & \tau_1 \end{matrix} \text{ respective in}$$

treffen möge, und seien die entsprechenden Punkte z_1 und t auf diesen beiden Trägern, so wissen wir, da nach dem Obigen im Grunde nur zwei mit einander projectivische Punktreihen auf diesen Trägern vorhanden sind, dass die Doppelverhältnisse folgender vier entsprechender Punktenpaare gleich sein müssen:

$$(\xi\,\zeta\,y\,t) = (x_1\,z_1\,\eta_1\,\tau_1) \text{ oder}$$
$$= (\eta_1\,\tau_1\,x_1\,z_1).$$

Nun geht durch die Axe $g(h_1)$ eine Ebene $X(Y_1)$, welche die Punkte ξ und η_1 enthält, eine zweite Ebene $Z(T_1)$, welche die Punkte ζ und τ_1 enthält; mithin können diese beiden Ebenen als Doppelebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel aufgefasst werden, bei denen die durch y und x_1 ein Paar und die durch t und z_1 ein zweites Paar entsprechender Ebenen sein müssen; da aber die durch y und x_1 gelegten Ebenen nach der Construction von den beiden Doppelebenen harmonisch getrennt werden, so bilden die beiden projectivischen Ebenenbüschel ein hyperbolisches Ebenensystem (Involution), und es müssen daher auch die durch t und z_1 gelegten Ebenen von den beiden Doppelebenen harmonisch getrennt werden; wird also die durch $\mathfrak{x}$ gelegte Ebene $Z(T_1)$ von den Verbindungslinien der beiden entsprechenden Punkte z_1 und t in einem Punkte r getroffen, dessen zugeordneter vierter harmonischer Punkt $\mathfrak{z}$ ist, so muss $\mathfrak{z}$ in der zweiten Doppelebene oder in der anfänglichen Ebene $X(Y_1)$ liegen. Dadurch ist nun die involutorische Lage dargethan und zugleich erwiesen, dass X und $\mathfrak{x}$ die veränderlichen Elemente (Polarebene und Pol) eines bestimmten räumlichen

Polarsystems sind, dessen (reelle oder imaginäre) Kernfläche wir $F^{(2)}$ nennen wollen. Die Tangentialebenen dieser Kernfläche sind nun solche ausgezeichneten Ebenen $X(Y_1)$, dass ihre Pole $\mathfrak{x}$ in ihnen selbst liegen, und wenn von vier harmonischen Punkten $s\,\mathfrak{x}\,x_1\,y$ zwei zugeordnete s und $\mathfrak{x}$ zusammenfallen, so muss auch einer der beiden andern zugeordneten Punkte in diesen doppelten Punkt hineinfallen, also entweder x_1 oder y; jede Tangentialebene der Kernfläche $F^{(2)}$ besitzt daher die Eigenschaft, dass der in dem einen oder dem andern Sinne der gegebenen reciproken Beziehung ihr entsprechende Punkt in ihr selbst liegt. Wenn nun x_1 in X liegt und wir fassen X als eine Ebene Y_1 auf, welche durch x_1 geht, so muss auch der entsprechende Punkt y in der Ebene X liegen. Wir sehen also, dass allemal beide der Ebene $X(Y_1)$ in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte x_1 und y gleichzeitig in ihr liegen; der auf dieser Geraden liegende Punkt $\mathfrak{x}$ ist der Berührungspunkt mit der Kernfläche $F^{(2)}$. Wir haben demnach folgendes Resultat:

In zwei gegebenen einander durchdringenden reciproken Räumen giebt es im Allgemeinen unendlich viele Ebenen von solcher Beschaffenheit, dass die ihnen entsprechenden Punkte in ihnen selbst liegen. Wird eine solche Ebene in doppeltem Sinne als $X(Y_1)$ aufgefasst und liegt der entsprechende Punkt x_1 in ihr, so liegt auch der entsprechende Punkt y in ihr. Alle solche Ebenen umhüllen eine bestimmte Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$, die Kernfläche eines räumlichen Polarsystems, welches auf folgende Art construirt wird: Irgend einer in doppeltem Sinne aufgefassten Ebene $X(Y_1)$ der beiden reciproken Räume entsprechen im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte x_1 und y, deren Verbindungslinie die Ebene in einem Punkte s trifft, dessen zugeordneter vierter harmonischer Punkt $\mathfrak{x}$ sei; alsdann constituiren X und $\mathfrak{x}$ als Polarebene und Pol dieses räumliche Polarsystem. Ist die Kernfläche desselben imaginär, so giebt es keine solche besonderen Ebenen, deren entsprechende Punkte in ihnen selbst liegen.

10. Ganz ebenso, wie wir in der vorigen Betrachtung von einer beliebigen Ebene $X(Y_1)$ und den beiden ihr entsprechenden Punkten x_1 und y ausgingen, können wir anderseits von einem beliebigen Punkte in doppeltem Sinne der reciproken Beziehung: $x(y_1)$ und den beiden ihm entsprechenden Ebenen X_1 und Y ausgehen und durch die Schnittlinie derselben die vierte

harmonische Ebene $\mathfrak{X}$ legen, welche zugeordnet ist zu der durch den anfänglichen Punkt $x\,(y_1)$ gehenden Ebene; wir erhalten durch ganz gleichlaufende Betrachtungen ein entsprechendes Resultat, welches folgendermaassen lauten muss:

In zwei gegebenen einander durchdringenden reciproken Räumen giebt es im Allgemeinen unendlich viele Punkte von solcher Beschaffenheit, dass die ihnen entsprechenden Ebenen durch sie selbst gehen. Wird ein solcher Punkt in doppeltem Sinne als $x\,(y_1)$ aufgefasst und geht die entsprechende Ebene X_1 durch ihn, so geht auch die entsprechende Ebene Y durch ihn. Alle solche Punkte liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung $f^{(2)}$, der Kernfläche eines räumlichen Polarsystems, welches auf folgende Weise construirt wird: Irgend einem in doppeltem Sinne aufgefassten Punkte $x\,(y_1)$ der beiden reciproken Räume entsprechen im Allgemeinen zwei verschiedene Ebenen X_1 und Y, deren Schnittlinie mit dem angenommenen Punkte verbunden eine Ebene liefert, deren zugeordnete vierte harmonische $\mathfrak{X}$ sei, alsdann constituiren x und $\mathfrak{X}$ als Pol und Polarebene dieses räumliche Polarsystem. Ist die Kernfläche desselben imaginär, so giebt es keine solche besonderen Punkte, deren entsprechende Ebenen durch sie selbst gehen.

Die beiden soeben construirten Polarsysteme oder die ihnen zu Grunde liegenden Kernflächen $F^{(2)}$ und $f^{(2)}$ sind keineswegs identisch, haben aber eine eigenthümliche Lage zu einander, die wir später erkennen werden. Sind sie reell, was natürlich immer bei beiden Flächen gleichzeitig der Fall ist, und *entsprechen einer Tangentialebene $X\,(Y_1)$ der Fläche $F^{(2)}$ die beiden in ihr liegenden Punkte x_1 und y, so geht die Verbindungslinie derselben durch den Berührungspunkt; anderseits entsprechen einem Punkte $x\,(y_1)$ der Fläche $f^{(2)}$ die beiden durch ihn gehenden Ebenen X_1 und Y, so liegt die Schnittlinie derselben in der Tangentialebene des Punktes $x\,(y_1)$ an der Fläche $f^{(2)}$.*

Die Frage nach solchen Geraden in den beiden reciproken Räumen, deren in dem einen oder andern Sinne entsprechende Gerade sie treffen, die also gleichzeitig einen Schnittpunkt haben und in einer Ebene liegen, lässt sich aus dem Vorigen leicht beantworten. In der That, wenn zwei sich entsprechende Gerade der beiden reciproken Räume g und g_1 sich treffen, so muss ihr Schnittpunkt $x\,(y_1)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass die ihm

entsprechende Ebene X_1 durch g_1, die ihm entsprechende Ebene Y durch g hindurchgeht, folglich ist dieser Schnittpunkt $x(y_1)$ ein Punkt der Fläche $f^{(2)}$, und gleichzeitig muss die durch (gg_1) gelegte Ebene $U(V_1)$ den in dem einen Sinne ihr entsprechenden Punkt u_1 auf g_1, den in dem andern Sinne ihr entsprechenden Punkt v auf g haben, also muss die durch gg_1 gelegte Ebene eine Tangentialebene der Fläche $F^{(2)}$ sein. Wir haben also den Satz:

Wenn zwei sich entsprechende Gerade der beiden reciproken Räume sich treffen, so liegt ihr Schnittpunkt auf der Fläche $f^{(2)}$, die durch sie bestimmte Ebene ist eine Tangentialebene der Fläche $F^{(2)}$.

Fassen wir die Gerade g, die mit g_1 in einer Ebene liegt, in dem andern Sinne als h_1 auf, so muss, weil sie in V_1 liegt, die entsprechende Gerade h durch v gehen, also da v auf g liegt, so folgt der Satz:

Wenn eine in doppeltem Sinne aufgefasste Gerade $g(h_1)$ von der in dem einen Sinne ihr entsprechenden Geraden g_1 getroffen wird, so wird sie auch von der in dem andern Sinne ihr entsprechenden Geraden h getroffen.

Nehmen wir umgekehrt einen beliebigen Punkt der Fläche $f^{(2)}$ in doppeltem Sinne aufgefasst: $x(y_1)$ und seien die beiden ihm entsprechenden Ebenen, welche durch ihn gehen: X_1 und Y, dann wird jedem Strahl g, der durch x geht und in der Ebene Y liegt, ein Strahl g_1 entsprechen, der durch denselben Punkt y_1 geht und in der Ebene X_1 liegt; solche zwei Strahlen beschreiben bei der Bewegung projectivische Strahlbüschel in den Ebenen Y und X_1, die durch je zwei entsprechende Strahlen gelegte Ebene (gg_1) umhüllt daher einen Kegel zweiter Ordnung, den Tangentialkegel aus dem Punkte $x(y_1)$ an die Fläche $F^{(2)}$; jedem andern durch x gehenden Strahl g, der nicht in der Ebene Y liegt, wird ein Strahl g_1 in der Ebene X_1 entsprechen, der nicht durch y_1 geht; da dieser Strahl g_1, der ganz in der Ebene X_1 liegt, nicht durch $x(y_1)$ geht und der Strahl g nur diesen einzigen Punkt $x(y_1)$ mit der Ebene gemein hat, so können sich solche zwei Strahlen gg_1 nicht treffen. Wir haben also folgendes Resultat:

Sämmtliche durch einen willkürlichen Punkt $x(y_1)$ der Fläche $f^{(2)}$ gehenden Strahlen, welche von den ihnen entsprechenden getroffen werden, liegen in denjenigen beiden Ebenen X_1 und Y, die durch diesen Punkt

gehen und in beiderlei Sinn der Beziehung ihm entsprechen; jede Tangentialebene des aus dem Punkte $x(y_1)$ an die Fläche $F^{(2)}$ gelegten Tangentialkegels schneidet die beiden Ebenen Y und X_1 in zwei entsprechenden Strahlen.

Ebenso folgt das gegenüberstehende Resultat:

Sämmtliche in einer willkürlichen Tangentialebene $X(Y_1)$ der Fläche $F^{(2)}$ enthaltenen Strahlen, welche von den ihnen entsprechenden getroffen werden, gehen durch diejenigen beiden Punkte x_1 und y dieser Ebene, welche in beiderlei Sinn der Beziehung ihr entsprechen; jeder Punkt des Kegelschnitts, in welchem die Ebene $X(Y_1)$ die Fläche $f^{(2)}$ schneidet, liefert mit x_1 und y verbunden, zwei entsprechende Strahlen.

Hieraus folgt weiter: Wenn wir die durch den willkürlichen Punkt $x(y_1)$ der Fläche $f^{(2)}$ gehenden ihr in beiderlei Sinn entsprechenden Ebenen X_1 und Y kennen, von denen die erste in einem Kegelschnitt $X_1^{(2)}$, die andere in einem Kegelschnitt $Y^{(2)}$ die Fläche $f^{(2)}$ schneiden möge [welche beiden Kegelschnitte $X_1^{(2)}$ und $Y^{(2)}$ die Schnittlinie der Ebenen X_1, Y zu einer gemeinschaftlichen Tangente in ihrem gemeinschaftlichen Punkte $x(y_1)$ haben], dann wird jede andere Tangentialebene des aus $x(y_1)$ an $F^{(2)}$ gelegten Tangentialkegels die Kegelschnitte $Y^{(2)}$ und $X_1^{(2)}$ in denjenigen beiden übrigen Punkten treffen, welche in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung ihr entsprechend sind. Und anderseits: Wenn wir eine willkürliche Tangentialebene $X(Y_1)$ der Fläche $F^{(2)}$ und die beiden in ihr liegenden in beiderlei Sinn ihr entsprechenden Punkte x_1 und y kennen, deren jeder der Mittelpunkt eines Tangentialkegels $x_1^{(2)}$ und $y^{(2)}$ an die Fläche $F^{(2)}$ ist [welche beiden Kegel: $x_1^{(2)}$ und $y^{(2)}$ die Verbindungslinie $x_1 y$ zu einem gemeinschaftlichen Strahl in der gemeinschaftlichen Tangentialebene $X(Y_1)$ haben], dann wird jeder andere Punkt der Schnittkurve von der Ebene $X(Y_1)$ mit der Fläche $f^{(2)}$ die zwei noch übrigen an die Kegel $x_1^{(2)}$ und $y^{(2)}$ gehenden Tangentialebenen zu den beiden durch ihn gehenden in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung ihm entsprechenden Ebenen haben.

Hierdurch wird eine gewisse Unbestimmtheit gehoben, durch welche das räumliche Problem von dem ebenen sich unterscheidet: Durch jeden Punkt $x(y_1)$ der Fläche $f^{(2)}$ gehen nämlich unendlich viele Tangentialebenen an die Fläche $F^{(2)}$, die einen Kegel zweiten Grades umhüllen; welches sind

unter diesen diejenigen beiden X_1 und Y, die dem Punkte in dem einen und andern Sinne der reciproken Beziehung entsprechen? Und anderseits liegen in jeder Tangentialebene $X(Y_1)$ der Fläche $F^{(2)}$, unendlich viele Punkte eines Kegelschnitts, in welchem $f^{(2)}$ von diesen Ebenen geschnitten wird, welches sind unter diesen diejenigen beiden x_1 und y, die der Ebene in dem einen und andern Sinne der reciproken Beziehung entsprechen?

Sind die beiden Kernflächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ (durch die oben construirten Polarsysteme) bekannt und kennt man ausserdem nur *einmal* die einem Punkt x der Fläche $f^{(2)}$ entsprechende durch ihn gehende Ebene X_1, so ist jetzt alles unzweideutig bestimmt; zunächst ermitteln wir für den als y_1 aufgefassten Punkt x die entsprechende Ebene Y, indem wir die Tangentialebene der Fläche $f^{(2)}$ im Punkte x durch die Ebene X_1 schneiden lassen und durch die Schnittlinie die zweite noch mögliche Tangentialebene Y an die Fläche $F^{(2)}$ legen; um sodann zu irgend einem Punkte $z\,(t_1)$ der Fläche $f^{(2)}$ die beiden ihm entsprechenden durch ihn gehenden Ebenen Z_1 und T zu finden, legen wir durch die Verbindungslinie von $x\,(y_1)$ mit $z\,(t_1)$ die beiden möglichen Tangentialebenen an $F^{(2)}$; die eine $U\,(V_1)$ möge die Ebenen Y und X_1 in den Strahlen g und g_1, die andere $U'(V'_1)$ die Ebenen Y und X_1 in den Strahlen g' und g'_1 schneiden; die Strahlen $g\,g'\,g_1\,g'_1$, welche alle durch $x\,(y_1)$ gehen, mögen der Fläche $f^{(2)}$ zum andern Male in $v\,v'\,u_1\,u'_1$ begegnen; dann wird die

durch $z\;v\;v'$ gelegte Ebene die gesuchte Ebene T,
die „ $t_1\,u_1\,u'_1$ „ „ „ „ „ Z_1

sein, denn es entsprechen nach dem Obigen der Ebene $U(V_1)$ die Punkte u_1 und v, der Ebene $U'\,(V'_1)$ die Punkte u'_1 und v', folglich dem Strahle $xz(y_1t_1)$ in beiderlei Sinn die Strahlen $u_1\,u'_1$ und $v\,v'$, also dem Punkte $z\,(t_1)$ dieses Strahles zwei Ebenen, deren eine durch $u_1\,u'_1$, die andere durch $v\,v'$ gehen muss, und da sie ausserdem durch den Punkt $z\,(t_1)$ selbst gehen, weil dieser auf der Fläche $f^{(2)}$ liegt, so ist die Ebene $(z\,v\,v') = T$ und $(t_1\,u_1\,u'_1) = Z_1$.

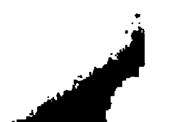
In ganz gleicher Weise lassen sich, sobald die Kernflächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ gegeben sind und man nur *einmal* den einer Tangentialebene der Fläche $F^{(2)}$ entsprechenden Punkt in $f^{(2)}$ kennt, die jeder beliebigen andern Tangentialebene in beiderlei Sinn der Beziehung entsprechenden Punkte

unzweideutig ermitteln, was, um nicht weitläufig zu werden, übergangen werden mag.

11. Um den Zusammenhang zwischen den beiden Flächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ oder den sie vertretenden Polarsystemen zu ermitteln, wollen wir die Totalität aller solcher Geraden $x_1 y$ näher ins Auge fassen, welche die einer beliebigen in doppeltem Sinne der reciproken Beziehung aufgefassten Ebene $X(Y_1)$ entsprechenden Punkte x_1 und y verbinden, oder auch die Schnittlinien zweier Ebenen, die einem beliebigen in beiderlei Sinn der Beziehung aufgefassten Punkte entsprechen. Beides fällt augenscheinlich zusammen: Entsprechen nämlich einer beliebigen Ebene $X(Y_1)$ die beiden Punkte x_1 und y und verbinden wir dieselben durch eine Gerade, die in doppeltem Sinne als $g(h_1)$ bezeichnet werden möge, dann wird dem Strahle g ein Strahl g_1 entsprechen, welcher in der Ebene Y_1 liegen muss, weil g durch y geht, und dem Strahle h_1 wird ein Strahl h entsprechen, welcher in der Ebene X liegen muss, weil h_1 durch x_1 geht; da aber X und Y_1 dieselbe Ebene bezeichnen, so müssen die Geraden g_1 und h, welche in ihr liegen, sich schneiden, und wird ihr Schnittpunkt mit $p(q_1)$ bezeichnet, so müssen die beiden ihm entsprechenden Ebenen P_1 und Q durch die anfängliche Gerade $g(h_1)$ gehen; wir sehen also, dass *dieselbe Gerade, welche als Verbindungslinie zweier Punkte x_1 und y auftrat, die einer und derselben in doppeltem Sinne aufgefassten Ebene $X(Y_1)$ entsprechen, gleichzeitig als die Schnittlinie zweier Ebenen auftritt P_1 und Q, die einem und demselben Punkte $p(q_1)$ in beiderlei Sinn der Beziehung entsprechen.*

Eine solche Gerade wollen wir kurz *Wechselstrahl* nennen und die Totalität aller Wechselstrahlen aufsuchen; denn nicht jede Gerade im Raume ist Wechselstrahl, wie aus dem soeben Bemerkten folgt, da nur eine solche Gerade Wechselstrahl ist, die als $g(h_1)$ aufgefasst ihre entsprechenden beiden g_1 und h in einer Ebene hat.

Gehen wir von einer beliebigen Ebene $X(Y_1)$ aus, verbinden die entsprechenden Punkte x_1 und y, bezeichnen diesen Wechselstrahl durch $g(h_1)$ und die ihm entsprechenden Geraden durch g_1 und h, welche in der Ebene $X(Y_1)$ liegen, lassen wir sodann eine veränderliche Ebene um den Wechselstrahl $g(h_1)$ sich drehen, so beschreiben die ihr entsprechenden beiden Punkte zwei projectivische Punktreihen auf den Trägern g_1 und h und die Verbin-



dungsstrahlen entsprechender Punkte, welche offenbar Wechselstrahlen sind, umhüllen in der Ebene $X(Y_1)$ einen gewissen Kegelschnitt $K^{(2)}$, der auch g_1 und h berührt, weil diese offenbar auch Wechselstrahlen sind. Mehr Wechselstrahlen kann es aber in der willkürlich angenommenen Ebene $X(Y_1)$ nicht geben, denn gäbe es noch irgend einen $k(l_1)$, so müssten die Geraden k_1 und l, welche beziehlich durch x_1 und y gehen, sich treffen, also in einer durch $g(h_1)$ gelegten Ebene liegen; der Strahl $k(l_1)$ müsste also mit einem der früheren zusammenfallen. Wir haben also dies Resultat:

In einer beliebigen Ebene giebt es unendlich viele Wechselstrahlen, welche einen gewissen Kegelschnitt $K^{(2)}$ umhüllen.

Auf ganz dieselbe Weise gelangen wir zu einem gegenüberstehenden Ergebniss: Gehen wir von einem beliebigen Punkte $p(q_1)$ aus, dessen entsprechende Ebenen P_1 und Q sich in einem Wechselstrahle $g(h_1)$ schneiden, bestimmen wir zu ihm die beiden entsprechenden Strahlen g_1 und h, welche durch den anfänglichen Punkt $p(q_1)$ gehen, und bewegen wir auf dem Wechselstrahle $g(h_1)$ einen veränderlichen Punkt, dessen beide entsprechenden Ebenen um g_1 und h als Axen zwei projectivische Ebenenbüschel beschreiben, dann wird die Schnittlinie je zweier entsprechender Ebenen Strahl eines gewissen Kegels $C^{(2)}$ sein, dessen Mittelpunkt $p(q_1)$ ist, und die Strahlen desselben werden sämmtliche durch diesen Punkt gehenden Wechselstrahlen sein, also:

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen unendlich viele Wechselstrahlen, welche einen Kegel zweiten Grades $C^{(2)}$ bilden.

Die Totalität sämmtlicher Wechselstrahlen ist von gleicher Mächtigkeit mit sämmtlichen Punkten des Raumes, denn zu jedem Punkt $p(q_1)$ gehört ein bestimmter Wechselstrahl, die Schnittlinie (P_1, Q), und auch von gleicher Mächtigkeit mit sämmtlichen Ebenen des Raumes; denn zu jeder Ebene $X(Y_1)$ gehört ein bestimmter Wechselstrahl, die Verbindungslinie $x_1 y$. Die Wechselstrahlen ordnen sich ferner im Raume zu unendlich vielen Regelschaaren, denn die zu allen Punkten einer geraden Linie gehörigen Wechselstrahlen bilden offenbar eine Regelschaar eines Hyperboloids. Ist die Gerade, auf welcher wir einen veränderlichen Punkt laufen lassen, selbst ein Wechselstrahl, so degenerirt das zugehörige Hyperboloid in einen Kegel $C^{(2)}$, und ist die Gerade, um welche wir eine veränderliche Ebene drehen,

selbst ein Wechselstrahl, so degenerirt das zugehörige Hyperboloid in einen Kegelschnitt.

Hieraus geht hervor, dass die Totalität aller Wechselstrahlen ein Gebilde constituirt, welches man einen *Strahlencomplex**) nennt, und zwar einen solchen *vom zweiten Grade und von der zweiten Classe*, weil die Complexstrahlen einer beliebigen Ebene einen Kegelschnitt $K^{(2)}$ umhüllen und die Complexstrahlen, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, einen Kegel $C^{(2)}$ bilden. Dies ist auch von vornherein klar, denn lassen wir die doppelt aufgefasste Ebene $X(Y_1)$ den ganzen Raum durchstreifen, so werden die Punkte x_1 und y, welche mit jener Ebene reciproke Räume durchlaufen, selbst zwei collineare Räume erzeugen, also erzeugt die Verbindungslinie entsprechender Punkte $x_1 y$ zweier collinearen Räume einen *Reye*schen Strahlencomplex.

12. Wir wollen nun in dem gefundenen Strahlencomplex unter allen Kegelschnitten $K^{(2)}$ solche besonderen aufsuchen, welche in Punktenpaare zerfallen und unter allen Kegeln $C^{(2)}$ solche, die in Ebenenpaare zerfallen; das erstere tritt ein, wenn drei in einer Ebene liegende Complexstrahlen durch denselben Punkt laufen, das letztere, wenn drei durch einen Punkt gehende Complexstrahlen in einer Ebene liegen; diese beiden Bedingungen fallen aber zusammen, denn sobald die eine erfüllt ist, so ist es auch die andere.

Gehen wir von einem willkürlich gewählten Wechselstrahl $g(h_1)$ aus und nehmen auf ihm irgend drei Punkte $p_1 p_2 p_3$ an, so geht durch jeden von ihnen ein Kegel von Wechselstrahlen, und die drei Kegel $C_1^{(2)}\, C_2^{(2)}\, C_3^{(2)}$ haben den Wechselstrahl $g(h_1)$ gemeinschaftlich; sie schneiden sich ausserdem im Allgemeinen in einer gewissen Anzahl von Punkten, die folgendermaassen ermittelt wird: Die Kegel $C_1^{(2)}$ und $C_2^{(2)}$ haben ausser dem Strahl $g(h_1)$ noch eine Raumkurve dritter Ordnung gemein, $\mathfrak{K}_{12}^{(3)}$, und die Kegel $C_2^{(2)}$ und $C_3^{(2)}$ die Raumkurve $\mathfrak{K}_{23}^{(3)}$; jede dieser Raumkurven geht durch die Mittelpunkte der beiden Kegel, auf welchen sie liegt, und durch die Schnittpunkte der Raumkurven $\mathfrak{K}_{12}^{(3)}$ und $\mathfrak{K}_{13}^{(3)}$ muss auch die Raumkurve $\mathfrak{K}_{23}^{(3)}$ hindurchgehen, weil diese Punkte allen drei Kegeln gemeinschaftlich sind. Verbinden wir den Mittelpunkt p_1 des Kegels $C_1^{(2)}$ mit allen Punkten der Raumkurve $\mathfrak{K}_{23}^{(3)}$,

*) *Reye*, Geometrie der Lage, II. Abth. S. 116 und d. Journ., Bd. 74, S. 1.

welche nicht durch p_1 geht, durch Strahlen, so bilden diese einen Kegel dritten Grades $C^{(3)}$, welcher offenbar den Strahl $g\,(h_1)$ zu einem Doppelstrahl hat, weil dieser durch beide Punkte p_2 und p_3 der $\mathfrak{K}_{23}^{(3)}$ hindurchgeht. Wir haben also in p_1 zwei concentrische Kegel: einen Kegel zweiten Grades $C_1^{(2)}$, und einen Kegel dritten Grades $C^{(3)}$, die einen gemeinschaftlichen Strahl g haben, welcher für den letzteren Kegel Doppelstrahl ist. Diese beiden Kegel haben im Allgemeinen $2 \cdot 3 = 6$ gemeinschaftliche Strahlen, von denen zwei in g hineinfallen, folglich haben sie noch vier andere gemeinschaftliche Strahlen, welche nothwendig nach den gemeinschaftlichen Punkten der drei Raumkurven $\mathfrak{K}_{12}^{(3)}\,\mathfrak{K}_{13}^{(3)}\,\mathfrak{K}_{23}^{(3)}$ hingehen müssen, denn jeder Kegelstrahl von $C_1^{(2)}$ trifft die Raumkurven $\mathfrak{K}_{12}^{(3)}$ und $\mathfrak{K}_{13}^{(3)}$ nur noch in je einem einzigen Punkte. Die Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte dieser drei Raumkurven ist daher im Allgemeinen *vier*, und sie sind auf die eben angegebene Weise construirt worden.

Diese vier ausgezeichneten Punkte führen uns zur Beantwortung der vorgelegten Frage; sei einer derselben x, und wir legen durch ihn und den Wechselstrahl $g\,(h_1)$ eine Ebene, so müssen die drei Strahlen $p_1 x, p_2 x, p_3 x$ Wechselstrahlen sein und in einer Ebene liegen, sowie gleichzeitig durch einen Punkt laufen; mithin muss der im Allgemeinen von allen Wechselstrahlen dieser Ebene umhüllte Kegelschnitt $K^{(2)}$ zerfallen und ebenso der von allen Wechselstrahlen durch den Punkt x gebildete Kegel $C^{(2)}$ zerfallen.

Die durch den willkürlich gewählten Wechselstrahl $g\,(h_1)$ und den ausgezeichneten Punkt x gelegte Ebene wird im Allgemeinen nicht von solcher Beschaffenheit sein, dass ihr in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung ein und derselbe Punkt entspräche; denn allen durch $g\,(h_1)$ gelegten Ebenen entsprechen zwei projectivische Punktreihen auf den beiden Trägern g_1 und h, welche in einer Ebene liegen; würden also einer durch $g\,(h_1)$ gelegten Ebene zwei zusammenfallende Punkte entsprechen, so müssten diese in den Schnittpunkt von g_1 und h zusammenfallen, und da der Wechselstrahl $g\,(h_1)$ ein ganz willkürlich gewählter ist, so ist auch der Schnittpunkt von g_1 und h ein ganz willkürlicher, mithin entspricht ihm nicht in beiderlei Sinn eine und dieselbe Ebene; es entsprechen daher der durch $g\,(h_1)$ und x gelegten Ebene im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte, deren Verbindungslinie ein Wechselstrahl ist; diese auf g_1 und h gelegenen Punkte mögen ξ_1 und η heissen; bezeichnen wir noch die durch

g_1 und h gelegte Ebene: $E(F_1)$, so entsprechen ihr vermöge der reciproken Beziehung zwei bestimmte Punkte e_1 und f auf dem Wechselstrahl $g(h_1)$ und allen durch den Wechselstrahl $\xi_1 \eta$ gelegten Ebenen werden zwei projectivische gerade Punktreihen entsprechen, deren Verbindungsstrahlen in der anfänglichen durch $g(h_1)$ und x gelegten Ebene den Complexkegelschnitt umhüllen und deren Träger einerseits durch f und anderseits durch e_1 gehen.

Dieser Complexkegelschnitt zerfällt aber, wie wir wissen, in ein Punktepaar, von dem allemal der eine Punkt der Schnittpunkt der beiden Träger und der andere der Durchschnittspunkt aller Projectionsstrahlen ist; ein Projectionsstrahl ist nun $e_1 f$ oder $g(h_1)$; folglich muss der Schnittpunkt der beiden Träger der andere Zerfallungspunkt, d. h. der Punkt x sein, welcher nicht auf dem Projectionsstrahl $e_1 f$ liegt; hieraus folgt, dass xf und xe_1 die beiden Träger dieser besonderen perspectivisch liegenden projectivischen Punktreihen sind, dass also in ihren Schnittpunkt x zwei entsprechende Punkte derselben hineinfallen und endlich, dass dem Punkte x in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung eine und dieselbe durch $\xi_1 \eta$ gehende Ebene entspricht. Wir constatiren daher zunächst folgendes Resultat:

Es giebt in den beiden gegebenen reciproken Räumen im Allgemeinen nur vier ausgezeichnete Punkte x von der besonderen Art, dass jedem von ihnen in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung je zwei zusammenfallende Ebenen entsprechen.

Die der vorigen ganz gleichlaufende Betrachtung, welche der Kürze wegen unterdrückt werden mag, führt zu dem analogen Ergebniss:

Es giebt in den beiden gegebenen reciproken Räumen im Allgemeinen nur vier ausgezeichnete Ebenen X von der besonderen Beschaffenheit, dass jeder von ihnen in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung je zwei zusammenfallende Punkte entsprechen.

Es ist ersichtlich, dass das von jenen vier ausgezeichneten Punkten x gebildete Tetraeder mit dem von diesen vier Ebenen X gebildeten Tetraeder identisch zusammenfallen muss, denn legen wir durch drei jener ausgezeichneten Punkte eine Ebene, so muss ihr in beiderlei Sinn der Beziehung der Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen entsprechen, d. h. eine Ecke des zweiten Tetraeders muss zugleich eine Ecke des ersten sein u. s. f. In

welcher Weise aber bei dem doppelt gedachten Tetraeder die Ecken den Seitenflächen und wie die Kanten des Tetraeders einander entsprechen vermöge der gegebenen reciproken Beziehung, wollen wir nunmehr untersuchen.

13. Hiezu müssen wir noch einmal zu der vorigen Betrachtung zurückkehren: Wir gingen von einem willkürlichen Wechselstrahl $g(h_1)$ aus, dessen beide entsprechende Strahlen g_1 und h in einer Ebene $E(F_1)$ liegen; dieser entsprechen wiederum zwei Punkte e_1 und f auf dem ersten Wechselstrahl. Jetzt wurde durch den Wechselstrahl $g(h_1)$ eine besondere Ebene gelegt, welche durch einen der oben gefundenen vier ausgezeichneten Punkte x geht; dieser Ebene entsprechen zwei Punkte ξ_1 und η auf g_1 und h; die Verbindungslinie wollen wir der Deutlichkeit wegen $m(n_1)$ nennen, dann sind, wie wir gesehen haben, die entsprechenden Geraden:

$$xe = n \qquad xf_1 = m_1$$

die Träger zweier projectivischer Punktreihen, welche perspectivisch liegen müssen, weil in der besonderen Ebene $(m_1 n)$ der Complexkegelschnitt in ein Punktepaar zerfällt; die beiden Punktreihen auf den Trägern n und m_1 werden aber so erhalten, dass wir um die Axe $m(n_1)$ eine veränderliche Ebene drehen und die beiden in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte auf den Trägern n und m_1 aufsuchen.

Möge nun die um die Axe $m(n_1)$ gedrehte veränderliche Ebene selbst die Träger m_1 und n in den Punkten β_1 und α treffen, während ihre entsprechenden Punkte a_1 und b heissen, so durchlaufen, wie wir oben (9.) gesehen haben, die Punkte α und a_1 *dieselben* projectivischen Punktreihen auf den Trägern, wie b und β_1, und da α und β_1 perspectivisch liegen (in demselben Ebenenbüschel), so müssen a_1 und b projectivisch sein und ihre Verbindungslinie umhüllt den in der Ebene $(m_1 n)$ enthaltenen Complexkegelschnitt. Dieser zerfällt aber hier in ein Punktepaar, dessen einer Theil der Punkt x, der Schnittpunkt beider Träger $(m_1 n)$, ist und dessen anderer Theil auf ef_1 oder $g(h_1)$ liegt. Wenn nun die beiden projectivischen Punktreihen a_1 und b perspectivisch liegen, so sind nur zwei Fälle möglich, entweder:

1) die Punktreihen α und a_1, d. h. auch dieselben beiden Punktreihen:

b und β_1 liegen perspectivisch, dann liegen natürlich auch a_1 und b perspectivisch, weil α und β_1 der Construction zufolge perspectivisch liegen, oder:

2) die Punktreihen α und a_1, d. h. auch dieselben beiden Punktreihen: b und β_1 liegen nicht perspectivisch, dann würde Folgendes eintreten müssen, damit a_1 und b perspectivisch liegen: Während $\alpha\,\beta_1$ um den festen Punkt s [den Schnittpunkt der Ebene $(m_1 n)$ mit dem Strahle $m(n_1)$] sich dreht, müssten einmal für einen gewissen Strahl $\alpha^0\,\beta_1^0$ die entsprechenden Punkte a_1^0 und b^0 in den Schnittpunkt x der Träger hineinfallen; wären nun für eine beliebige andere Lage die entsprechenden Punkte: α und a_1, b und β_1, so wären die Doppelverhältnisse gleich:

$$(\alpha^0\,\alpha\,b^0\,b) = (a_1^0\,a_1\,\beta_1^0\,\beta_1) = (\beta_1^0\,\beta_1\,a_1^0\,a_1).$$

Da aber $\alpha^0\,\beta_1^0$ und $\alpha\,\beta_1$ sich in s treffen, b^0 und a_1^0 zusammenfallen, so müsste auch $b\,a_1$ durch s laufen, d. h. alle Strahlen $a_1 b$ müssten durch denselben festen Punkt laufen, um welchen sich der Strahl $\alpha\,\beta_1$ dreht. Nun ist aber $e\,f_1$ oder $g\,(h_1)$ auch ein solcher Projectionsstrahl, der mithin auch durch den Punkt s gehen müsste, folglich müsste der Wechselstrahl $g\,(h_1)$ von dem Strahle $m\,(n_1)$ oder $\xi_1\,\eta$ getroffen werden in dem Punkte s, und der Complexkegelschnitt in der durch $g\,(h_1)$ und x gelegten Ebene würde in die beiden Punkte x und s zerfallen; hieraus folgt, dass auch der dem Punkte s zugehörige Complexkegel in ein Ebenenpaar zerfallen müsste. Nun ist aber der Punkt s nichts Anderes, als derjenige, in welchem ein ganz willkürlich gewählter Complexstrahl $g\,(h_1)$ von der Ebene der beiden entsprechenden Strahlen $g_1\,h$ getroffen wird, und für jeden solchen Schnittpunkt zerfällt offenbar der zugehörige Complexkegel nicht, ebenso wenig, wie in jeder solchen Ebene der Complexkegelschnitt zerfällt, welche durch einen Wechselstrahl $g\,(h_1)$ und den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Strahlen $g_1\,h$ gelegt wird. Hieraus geht hervor, dass die Annahme 2) unstatthaft ist, und es bleibt also nur die Annahme 1) übrig, d. h. die Ebene durch $\xi_1\,\eta$, welche gleichzeitig in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung dem ausgezeichneten Punkte x entspricht, geht durch ihn selbst. Wir haben also folgende weitere Eigenschaft gefunden:

Jeder der vier ausgezeichneten Punkte x liegt selbst in derjenigen Ebene X, welche ihm in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung gleichzeitig entspricht.

Die gegenüberstehende Eigenschaft ist hier zugleich die umgekehrte

und selbstverständlich. Bezeichnen wir, um uns ein klares Bild von dem gegenseitigen Entsprechen der Ecken, Seitenflächen und Kanten des Tetraeders zu machen, die vier Ecken durch

$$a \quad b \quad c \quad d$$

und sei diejenige Seitenfläche, welche dem Punkte a entspricht und daher durch a gehen muss, die Seitenfläche $A = acd$, dann muss dem Punkte b eine Seitenfläche entsprechen, die durch b geht, aber nicht durch a gehen kann, weil b ausserhalb A liegt, folglich ist $B = bcd$; der Kante ab des Tetraeders entspricht daher die Gegenkante $(A, B) = cd$. Dem Punkte c, weil er in A liegt und auch in B liegt, muss eine Ebene C entsprechen, die erstens durch c geht und zweitens durch a und b, also $C = abc$, und endlich dem Punkte d eine Ebene D, die durch d geht und durch ab, d. h. $D = abd$; wir haben damit die vier Ecken und die vier Flächen des Tetraeders erschöpft und finden also folgende Paare in doppeltem Sinne sich entsprechender Elemente bei unserm Doppeltetraeder:

$$\begin{aligned} a &\text{ und } A\ (= acd), \\ b &\text{ und } B\ (= bcd), \\ c &\text{ und } C\ (= abc), \\ d &\text{ und } D\ (= abd). \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich das weitere Entsprechen der Kanten; das eine Paar Gegenkanten:

$$ab \text{ und } (A, B) = cd$$

steht als ein in doppeltem Sinne der reciproken Beziehung sich entsprechendes Strahlenpaar isolirt da, während die andern vier Kanten in folgender Weise sich entsprechen:

$$\begin{aligned} ac &\text{ und } (A, C) = ac, \\ cb &\text{ und } (C, B) = cb, \\ bd &\text{ und } (B, D) = bd, \\ da &\text{ und } (D, A) = da. \end{aligned}$$

Jede dieser vier Kanten, welche ein windschiefes Vierseit bilden, entspricht in doppeltem Sinne der reciproken Beziehung sich selbst, d. h.:

Es giebt in den beiden reciproken Räumen im Allgemeinen vier aus-

gezeichnete Gerade, welche ein windschiefes Vierseit bilden (ac, cb, bd, da), von der besonderen Beschaffenheit, dass jede von ihnen sich selbst entsprechend ist in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung; es giebt aber ausserdem noch ein einziges Paar von Geraden, die sich im Raume nicht treffen (ab und cd), von der besonderen Beschaffenheit, dass einer von ihnen die andere in beiderlei Sinn der reciproken Beziehung gleichzeitig entspricht.

Diese sechs Geraden sind die Kanten des oben gefundenen Tetraeders, dessen Ecken und Seitenflächen einander in der angegebenen Weise entsprechen.

14. Nachdem wir diese ausgezeichneten Elemente der beiden in einander liegenden reciproken Räume im Allgemeinen ermittelt haben, wollen wir nun sehen, was daraus für die gegenseitige Lage der beiden oben gefundenen Kernflächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ oder der sie vertretenden Polarsysteme folgt.

Die vier Punkte $abcd$ liegen offenbar in der Kernfläche $f^{(2)}$, weil die ihnen entsprechenden Ebenen durch sie selbst gehen und die vier Ebenen $ABCD$ sind Tangentialebenen der Fläche $F^{(2)}$; weil aber a und A für beide Polarsysteme gleichzeitig Pol und Polarebene sind, *so berühren sich die beiden Flächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ in den vier Punkten $abcd$ oder haben in diesen vier gemeinschaftlichen Punkten zusammenfallende Tangentialebenen $ABCD$.* Da ferner der Kante ac dieselbe Kante ac in dem einen und andern Sinne der Beziehung entspricht, so muss jedem Punkte dieser Kante eine Ebene entsprechen, welche durch ihn selbst geht; die Fläche $f^{(2)}$ geht daher durch die vier Kanten ac, cb, bd, da; ebenso muss, da jeder durch die Kante ac gelegten Ebene ein Punkt auf ihr selbst entspricht, jede solche Ebene Tangentialebene der Fläche $F^{(2)}$ sein; die Kante ac muss also ganz auf der Fläche $F^{(2)}$ liegen; wir haben also gefunden:

*Die beiden Flächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ schneiden sich in einem windschiefen Vierseit ac, cb, bd, da oder die Raumkurve $R^{(4)}$, in welcher die beiden Flächen zweiten Grades sich im Allgemeinen schneiden, zerfällt hier in vier Gerade, die Seiten eines windschiefen Vierseits.**)

---

*) Nach einer mündlichen Mittheilung ist zu demselben Resultat gleichzeitig Herr *Rosanes* gelangt, dessen analytische Untersuchungen über diesen Gegenstand wohl demnächst erscheinen werden.

Die beiden Gegenkanten des Tetraeders ab und cd sind ein Paar conjugirte Gerade für beide Flächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ oder die sie vertretenden Polarsysteme gleichzeitig, denn bezeichnen wir diese beiden ausgezeichneten Geraden durch $k(l_1)$ und $k_1(l)$, so entspricht jedem Punkte auf k in beiderlei Sinn der Beziehung ein Ebenenpaar durch $k_1(l)$, also geht auch die zugeordnete vierte harmonische Ebene allemal durch diese Gerade $k_1(l)$, und ebenso entspricht jeder durch $k(l_1)$ gelegten Ebene in beiderlei Sinn der Beziehung ein Punktenpaar auf $k_1(l)$, also liegt auch der zugeordnete vierte harmonische Punkt allemal auf $k_1(l)$. Die beiden Geraden $k(l_1)$ und $k_1(l)$ sind also conjugirte Gerade für beide Polarsysteme gleichzeitig; aber noch mehr: Denken wir uns durch $k(l_1)$ irgend eine Ebene $E(F_1)$ gelegt, der in beiderlei Sinn der Beziehung die Punkte e_1 und f auf der Geraden $k_1(l)$ entsprechen, und sei $\mathfrak{e}$ der zugeordnete vierte harmonische Punkt zu $e_1 f$ und dem Schnittpunkt mit $E(F_1)$, so sind E und $\mathfrak{e}$ Polarebene und Pol für die Fläche $F^{(2)}$; die Ebene $E(F_1)$ möge die Gerade $k_1(l)$ in ε schneiden, dann wird, weil E und $\mathfrak{e}$ Polarebene und Pol für $F^{(2)}$ sind, auch ε und die durch $k(l_1)$ und $\mathfrak{e}$ gelegte Ebene Pol und Polarebene für diese Fläche $F^{(2)}$ sein; nun entspricht anderseits der Ebene $l_1 e_1$ der Schnittpunkt lE und der Ebene kf derselbe Schnittpunkt $k_1 F_1$, also entsprechen dem Punkt ε zwei Ebenen durch $k(l_1)$, zu denen die zugeordnete vierte harmonische durch $\mathfrak{e}$ gehen muss; der Punkt ε und die durch $k(l_1)$ und $\mathfrak{e}$ gelegte Ebene sind daher auch Pol und Polarebene für die andere Fläche $f^{(2)}$, also gleichzeitig für beide Flächen; wir haben mithin folgendes Resultat:

Die beiden räumlichen Polarsysteme, deren Kernflächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ sind, stehen in einem solchen Zusammenhange mit einander, dass sie zwei bestimmte Gerade im Raume (ab und cd) mit den ihnen zugehörigen Punkt- und Ebenen-Involutionen als conjugirte Gebilde gemeinschaftlich haben.

Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Realität der Ecken und Seitenflächen des obigen Tetraeders und erfordert nur, dass das eine Paar Gegenkanten desselben ab und cd reell vorhanden sei; die Asymptotenpunkte der beiden reell construirbaren Punktsysteme, welche den Polarsystemen gemeinschaftlich zugehören, und die Asymptotenebenen der beiden Ebenensysteme, welche durch diese Axen gehen und den Polarsystemen gemein-

schaftlich zugehören, sind beziehungsweise die Ecken und Seitenflächen jenes Tetraeders.

Diese Eigenschaft bietet nunmehr eine vollkommene Analogie dar mit dem in A. betrachteten Fall zweier zusammenliegender reciproker Ebenen, denn dort war den beiden ebenen Polarsystemen, deren Kernkegelschnitte $k^{(2)}$ und $K^{(2)}$ waren, ein Punkt und seine Polare mit den ihnen zugehörigen Strahl- und Punktsystemen gemeinschaftlich, was sich so aussprechen liess, dass die beiden Kernkegelschnitte eine doppelte Berührung haben; hier sind es zwei conjugirte Gerade mit ihren Punkt- und Ebenen-Involutionen, welche beiden Polarsystemen gemeinschaftlich sind.

Die Frage, ob diese beiden ausgezeichneten Geraden ab und cd, ein Paar Gegenkanten des Tetraeders, *immer* reell sein müssen und wie sie [analog dem in der Ebene ausgezeichneten Paar $m(n_1)$ und $M_1(N)$] in einfacher Weise aus der gegebenen reciproken Beziehung construirt werden können, wird einer weiteren Untersuchung bedürfen. Auch die nahe liegende Frage, ob und wie sich zwei reciproke Räume in polare Lage bringen lassen, so dass sie ein räumliches Polarsystem erzeugen, d. h. die Kernflächen $f^{(2)}$ und $F^{(2)}$ zusammenfallen, ferner unter welchen Bedingungen sich zwei reciproke Räume in die polare Lage eines Nullsystems bringen lassen, behalte ich einer späteren Mittheilung vor.*)

Breslau den 12. April 1873.

---

*) Die analytische Beantwortung dieser Frage findet sich in: *Magnus*, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, S. 134, wo überhaupt die analytische Behandlung des Gegenstandes wohl zuerst unternommen ist.

Ueber die binären und ternären quadratischen Formen.

(Von Herrn *Eduard Selling* in Würzburg.)

Das Endziel dieser Untersuchungen ist die Lösung der unter III. in art. 278 der Disquisitiones arithmeticae von *Gauss* aufgestellten Aufgabe: Zu entscheiden, ob ternäre quadratische Formen einander äquivalent sind, und alle Substitutionen aufzustellen, durch welche sie in diesem Falle in einander übergehen. Für die positiven Formen ist der erste Theil dieser Aufgabe zuerst von *Seeber* (Untersuchungen über die Eigenschaften der pos. tern. quad. Formen, Freiburg 1831) und, nachdem *Gauss* (Göttingische gelehrte Anzeigen 1831, wieder abgedruckt: dieses Journal Bd. 20 und Werke Bd. II) die geometrischen Beziehungen besprochen hatte, einfacher von *Dirichlet* (dieses Journal Bd. 40) und *Hermite* (ebendaselbst) gelöst worden, der zweite Theil von *Eisenstein* (dieses Journal Bd. 41). Für die indifferenten ternären quadratischen Formen liegen die Untersuchungen von *Hermite*, Bd. 47 dieses Journals, vor, welche jedoch, wie sich im Einzelnen zeigen wird, noch mehrfacher Ergänzung und Fortbildung fähig sind.

Zur Vorbereitung für die indifferenten ternären Formen gebe ich auch für die positiven ternären, und zur Vorbereitung sowohl wie als Vorbild für die Behandlung der ternären Formen überhaupt, auch für die binären Formen eine neue Darstellung, welche vielleicht auch an sich einige Beachtung verdient.

I. Binäre positive Formen.

Neue Reductionsbedingungen. Gleichartige Coefficienten. Geometrische Beziehungen.

Sobald in einer quadratischen Form $\mathfrak{a}x^2 + 2\mathfrak{k}xy + \mathfrak{b}y^2$, die ich auch mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})(x, y)$ oder $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ bezeichne, und in welcher $\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b}, x$ und y beliebige reelle Grössen bedeuten sollen, die Invariante $\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{k}^2$, für welche ich I setze, und einer der äusseren Coefficienten, z. B. $\mathfrak{a}$, positiv sind, so

lassen sich durch sie nur positive Werthe darstellen, wesshalb sie dann eine positive Form heisst. In Substitutionen $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, durch welche eine Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b})(x, y)$ in eine Form $(\mathfrak{a}', \mathfrak{f}', \mathfrak{b}')(x', y')$ übergeht, und welche ich als die Substitutionen $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ bezeichne, sollen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle ganze Zahlen sein und soll überdies, solange nicht ausdrücklich etwas anderes bestimmt wird, die Substitutionsdeterminante $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ gleich 1 sein. Die Aufgabe, aus allen eigentlich äquivalenten, d. h. durch Substitutionen der angegebenen Art aus einander hervorgehenden Formen, den Formen *einer* Klasse, eine abzugrenzen, ist schon von *Lagrange* (Mémoires de l'Académie à Berlin 1773) und ebenso von *Gauss* (Disquisitiones arithmeticae), welcher für diese Form den Namen „reducirte Form" eingeführt hat, befriedigend gelöst. Die von ihnen aufgestellten Bedingungen — $\mathfrak{a} \gtrless 2\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ für eine solche reducirte Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b})$ bewirken, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die zwei kleinsten Zahlen sind, welche sich durch die Formen eigentlich, das heisst mittels relativ primer ganzer Zahlen x und y darstellen lassen, woraus unmittelbar folgt, dass es unter den Formen *einer* Klasse immer eine und nur eine solche reducirte Form giebt, wenn bei den drei Bedingungen die Ungleichheit stattfindet, während es zwei im Allgemeinen auch numerisch verschiedene solche, durch eine der beiden Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ oder durch beide auseinander hervorgehende Formen giebt, wenn in einer oder in zweien der drei Bedingungen die Gleichheit stattfindet.

Die angegebene Aufgabe ist aber nicht von der Art, nur auf eine Weise gelöst werden zu können, und so empfehlen sich für meine besonderen Zwecke *andere Reductionsbedingungen*, nämlich die, *dass* $\mathfrak{f}$ *nicht positiv, und* $-\mathfrak{f}$ *nicht grösser als* $\mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{b}$ *ist.* Diese Bedingungen werden zwar in jeder Klasse nicht nur von einer Form, sondern immer von dreien erfüllt, nämlich wenn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b})$ eine solche ist, und

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{h} + \mathfrak{f} = 0, \quad \mathfrak{b} + \mathfrak{f} + \mathfrak{g} = 0, \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{g} + \mathfrak{h} = 0,$$

also

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + 2\mathfrak{g} + \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{c} + 2\mathfrak{h} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + 2\mathfrak{f} + \mathfrak{b}$$

gesetzt wird, von den drei Formen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, welche durch

die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ cyklisch aus einander hervorgehen. Aber der Nachtheil, welcher hierin zu liegen scheint, verschwindet, wenn man die Formen symmetrisch durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ oder durch $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ ausdrückt. Setzt man nämlich $y-z=u$, $z-x=v$, $x-y=w$, sodass $u+v+w=0$ ist, und setzt zunächst $z=0$, so wird $\mathfrak{a}x^2+2\mathfrak{k}xy+\mathfrak{b}y^2 = -\mathfrak{a}vw-\mathfrak{b}wu-\mathfrak{c}uv = -\mathfrak{g}u^2-\mathfrak{h}v^2-\mathfrak{k}w^2$. Da jedoch die zwei letzteren Ausdrücke sich nicht ändern, wenn x, y und z um ein und dieselbe Grösse geändert werden, und da die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ lediglich eine cyklische Vertauschung unter den Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und unter den Zahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ hervorbringt, so besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen den drei Formen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, welche zugleich meine *Reductionsbedingungen* erfüllen. Letztere bestehen einfach darin, *dass von den drei Zahlen* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ *keine positiv* oder, was dasselbe ist, von den drei positiven Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nicht die Summe zweier kleiner als die dritte wird. Ist eine Grenze dieser Bedingungen erreicht, also z. B. $\mathfrak{k}=0$, so sind die den Formen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ sonst nur uneigentlich, d. h. mit der Substitutionsdeterminante -1 äquivalenten und ebenfalls reducirten Formen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{g}, \mathfrak{b})$, welche durch eine nicht cyklische Vertauschung unter $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und unter $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ aus ihnen hervorgehen, ihnen auch eigentlich äquivalent. Dass es neben den angegebenen reducirten Formen keine anderen solchen in einer Klasse geben kann, folgt daraus, dass, wenn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ eine reducirte ist, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die kleinsten Zahlen sind, welche sich durch die Formen der Klasse eigentlich, also mittels relativ primer Zahlen u, v, w darstellen lassen, und nur die grösste derselben noch auf eine andere Weise dargestellt werden kann in einem Ausnahmefalle, wenn nämlich eine Grenze der Reductionsbedingungen erreicht ist. Man erkennt dies daraus, dass, wenn von den drei Zahlen u, v, w eine gleich Null ist, die zwei anderen nur 1 und -1 sein dürfen, weil sonst u, v, w einen gemeinsamen Divisor hätten. Wenn aber keine der drei Zahlen u, v, w gleich Null ist, so wird $-\mathfrak{g}u^2-\mathfrak{h}v^2-\mathfrak{k}w^2$, worin $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ negativ sind, grösser als in den angegebenen Fällen, höchstens, wenn eine der Zahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ gleich Null ist, gleich dem drittkleinsten der dort erhaltenen Werthe, nämlich, wenn z. B. $\mathfrak{k}=0$ ist, durch das Werthsystem

$1, 1, -2$ oder $-1, -1, 2$ von u, v, w. Andererseits ist auch leicht zu sehen, dass es in jeder Klasse reducirte Formen giebt und wie dieselben zu finden sind. Denn mehr als eine der Zahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ kann nicht positiv oder Null sein, da die Summe je zweier immer negativ ist, und man erhält aus jeder nicht reducirten Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, wenn in ihr nur $\mathfrak{k} < 0$ ist, was nöthigenfalls durch Anwendung der Substitution $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ erreicht werden kann, schliesslich eine reducirte, wenn man auf sie und alle folgenden Formen je die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ oder $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ anwendet, je nachdem in derselben $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{h}$ positiv ist. Es verwandeln sich nämlich durch diese Substitutionen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ bezüglich in $\mathfrak{k} + 2\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} + 2\mathfrak{g}$, $-\mathfrak{g}$, und in $\mathfrak{g} + 2\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k} + 2\mathfrak{h}$, $-\mathfrak{h}$, und, so lange auch von den neu erhaltenen Zahlen noch eine positiv wird, ist sie doch, da ja $\mathfrak{k} + \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, und $\mathfrak{h} + \mathfrak{k}$ negativ sind, kleiner als die positive der vorausgegangenen Form, sodass schliesslich alle drei negativ oder Null werden müssen. Es ist auch leicht vorauszusehen, wie oft je dieselbe der angegebenen Substitutionen zu wiederholen ist, bis der neue an die Stelle des positiven tretende Coefficient Null oder negativ wird, mit anderen Worten, welches die verschiedenen positiven Werthe von γ und β in den abwechselnd anzuwendenden Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ sind. Sie sind nämlich die kleinsten Zahlen, durch welche bezüglich $\mathfrak{g} - \gamma\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h} - \beta\mathfrak{a}$ Null oder negativ werden. An die Stelle von $\mathfrak{k}$ tritt bezüglich $\mathfrak{k} + \gamma\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k} + \beta\mathfrak{a}$. Je der übrige dieser Coefficienten lässt sich dann nicht nur direct, sondern auch aus den zwei anderen berechnen nach Massgabe der Gleichung $\mathfrak{h}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{g} + \mathfrak{g}\mathfrak{h} = I$. Von dieser Gleichung, wie von den Gleichungen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{g} + \mathfrak{b}\mathfrak{h} + \mathfrak{c}\mathfrak{k} = -2I \text{ und}$$

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2(\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c})^2 - 4\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -4I$$

sei hier noch bemerkt, dass sie im Falle der Reduction Grenzbedingungen für die Coefficienten liefern, durch welche bei ganzen Coefficienten auch die Endlichkeit der Klassenanzahl bei gegebener Invariante bewiesen wird.

In sich selbst gehen die positiven binären Formen im Allgemeinen nur durch die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ und ihre Wiederholungen über. Ausnahmen finden statt, wenn die drei reducirten nicht sämmtlich von einander

verschieden sind, und wenn es sechs reducirte giebt. Gleichheit zwischen zweien der Coefficienten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ bewirkt nämlich, dass die Formen sich selbst uneigentlich äquivalent werden, z. B. bei $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ die Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ mittels der Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Bei einer Vereinigung solcher Relationen, welche nur bei reducirten Formen vorkommen kann, also bei $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ sind demnach die reducirten Formen sich selbst nochmals eigentlich äquivalent, nämlich mittels der Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, deren dreimalige Anwendung die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ giebt. Wird einer der Coefficienten $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ gleich Null, was ebenfalls nur bei reducirten Formen eintreten kann, so sind sich die Formen uneigentlich äquivalent, z. B. bei $\mathfrak{k} = 0$ die Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ mittels der Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Verbindet sich dieser Fall mit dem $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, also dem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, so ergiebt die Vereinigung der betreffenden Substitutionen die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, mittels welcher $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ sich selbst eigentlich äquivalent wird.

Die Transformation der indifferenten Formen, welche ich auf die der positiven zurück führe, lässt sich, was freilich erst bei den ternären Formen entscheidende Wichtigkeit erlangt, sehr übersichtlich im Anschluss an geometrische Betrachtungen darstellen, wie sie für die positiven Formen zuerst von *Gauss* mitgetheilt worden sind am oben angeführten Orte. Ich habe vorerst auf die Bedeutung meiner Reductionsbedingungen bei den positiven binären hinzuweisen. Der Manchfaltigkeit aller ganzen Werthe x und y in der Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})(x, y)$ entspricht die Manchfaltigkeit aller Durchschnittspunkte zweier in einer Ebene gelegener unbegrenzter Systeme äquidistanter Parallellinien, auf welchen von den aufeinander folgenden Punkten die Strecken $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$ eingeschlossen werden, während der Cosinus des Winkels zwischen den als positiv angenommenen Richtungen dieser Strecken gleich $\frac{\mathfrak{k}}{\sqrt{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{b}}}$, also der Inhalt des von ihnen gebildeten Parallelogramms gleich $\sqrt{I}$ ist. In Bezug auf eine durch eine Substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ hervorgehende äquivalente Form $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$ behält das System der Punkte dieselbe Bedeutung,

nur die Seiten der Parallelogramme werden andere. Es liegt nämlich die Strecke $\sqrt{\mathfrak{a}'}$ so, dass man von ihrem Anfangspunkt zu ihrem Endpunkt gelangt durch α-maliges Zurücklegen der Strecke $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und γ-maliges der Strecke $\sqrt{\mathfrak{b}}$, und dasselbe gilt für $\sqrt{\mathfrak{b}'}$, wenn man α, γ in β, δ verwandelt. Da dasselbe für $\sqrt{\mathfrak{c}'}$ gilt, wenn man α, γ in $-\alpha-\beta, -\gamma-\delta$ verwandelt, so erkennt man die der von $\mathfrak{k}$ analoge Bedeutung von $\mathfrak{k}'$. Da die Form $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ durch die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ aus der Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ hervorgehen soll, so gelangt man zum Ausgangspunkt zurück, wenn man nach einander die Strecken $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$ jede in positiver oder jede in negativer Richtung durchläuft. Als die geometrische Bedeutung meiner Reductionsbedingungen $\mathfrak{g} \leqq 0$; $\mathfrak{h} \leqq 0$; $\mathfrak{k} \leqq 0$ ergiebt sich also, dass die Aussenwinkel des von den drei Strecken $\sqrt{\mathfrak{a}}, \sqrt{\mathfrak{b}}, \sqrt{\mathfrak{c}}$ gebildeten Dreiecks stumpf sind, dass also dieses Dreieck nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche spitzwinkelig ist. Es folgt aus dem Obigen, dass es nur ein System von drei ihrer Grösse nach völlig bestimmten solchen Strecken giebt, wenn, was die Aequivalenz fordert, diese drei Strecken weder Punkte des Systems überschreiten noch im Innern des Dreieckes einschliessen. Das Punktsystem kommt natürlich mit sich selbst zur Coincidenz nach allen Parallelverschiebungen, bei welchen irgend zwei Punkte coincidiren. Dasselbe geschieht nach Drehungen in der Ebene um einen Punkt des Systems und zwar in so viel verschiedenen Lagen, als es verschiedene Substitutionen giebt, mittels deren die Formen sich selbst eigentlich äquivalent sind, also im Allgemeinen in zwei Lagen, wenn ich die ursprüngliche Lage und die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ mitzähle, im Falle $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ in sechs Lagen, im Falle $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{k} = 0$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{g} = 0$ oder $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{h} = 0$ in vier Lagen. Sind die Formen sich selbst auch uneigentlich äquivalent, so finden die Coincidenzen auch statt nach Umklappungen des Systems um Gerade, welche in dessen Ebene liegen. Den Uebergang von einem Punkte des Systems zu einem andern kann man sich ausgeführt denken durch x-maliges Durchlaufen von $\sqrt{\mathfrak{a}}$, y-maliges von $\sqrt{\mathfrak{b}}$ und z-maliges von $\sqrt{\mathfrak{c}}$, wobei eine Veränderung von x, y und z um ein und dieselbe Zahl auf die Lage des Endpunktes keinen Einfluss hat. Setzt man x, y oder z constant gleich Null, so entspricht dies der gewöhnlichen Darstellung durch die

Formen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ oder $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b})$. Unterscheidet man an den Linien $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$ und $\sqrt{\mathfrak{c}}$ ausser der positiven oder negativen Richtung auch eine positive oder negative Seite und bezeichnet je diejenige Seite derselben als die positive, auf welcher das besprochene Dreieck liegt, wenn die drei Seiten in der angegebenen Reihenfolge in positiver Richtung durchlaufen werden, so giebt die mit u bezeichnete Differenz $y - z$ an, in der wie vielten zu $\sqrt{\mathfrak{a}}$ parallelen Linie der betreffende Endpunkt liegt, wenn man von der durch den Anfangspunkt gehenden aus nach der positiven Seite derselben zu zählt, und das Analoge geben die mit v, w bezeichneten Differenzen $z - x$, $x - y$ an.

II. Indifferente binäre Formen.

a) Zurückführung der Reductionsbedingungen auf die der positiven Formen.

Von den indifferenten Formen bemerkt zwar *Gauss*, dass sie sich der bei den positiven angewandten geometrischen Behandlung ganz entziehen, damit kann jedoch nicht gesagt sein, dass nicht bei geeigneter Modification Analoges auch bei diesen gelten könne. Wie nun *Dirichlet* und *Hermite* an dem angegebenen Orte die geometrischen Beziehungen benützt haben, um die Reduction der positiven ternären quadratischen Formen zu entwickeln, so will ich auch bei dem über die indifferenten binären und ternären quadratischen Formen Mitzutheilenden mich des geometrischen Gewandes bedienen, welches die Uebersicht erleichtert, und eine naturgemäss bezeichnende Ausdrucksweise darbietet, während doch nur eine Aenderung der Worte nothwendig ist, wenn man sich von dem vielleicht fremdartig scheinenden Bilde frei machen will.

Die besprochene *Gauss*ische geometrische Darstellung der positiven binären quadratischen Formen giebt genau dasselbe Bild, als wenn in der bekannten, von *Gauss* um dieselbe Zeit (Göttingische gelehrte Anzeigen, April 1831, Werke Bd. II., S. 169) veröffentlichten Weise einer der conjugirten complexen Factoren $\rho x + \sigma y$, $\rho' x + \sigma' y$ der Form $\mathfrak{a}x^2 + 2\mathfrak{f}xy + \mathfrak{b}y^2$ geometrisch dargestellt würde: Setzt man $\rho = \xi + \xi_1 i$, $\sigma = \eta + \eta_1 i$, so ist

$$(1.)\quad \xi^2 + \xi_1^2 = \mathfrak{a}\,;\ \xi\eta + \xi_1\eta_1 = \mathfrak{f}\,;\ \eta^2 + \eta_1^2 = \mathfrak{b}.$$

Betrachtet man nun anstatt der positiven Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ eine indifferente (a, k, b), so werden die entsprechenden Factoren reell, oder, was dasselbe ist, an die Stelle von ξ_1, η_1 treten rein imaginäre Grössen, die ich mit $\xi_1 i, \eta_1 i$ bezeichnen will. An die Stelle der Gleichungen (1.) treten dann Gleichungen

$$(2.)\quad \xi^2 - \xi_1^2 = a\,;\ \xi\eta - \xi_1\eta_1 = k\,;\ \eta^2 - \eta_1^2 = b.$$

Wie nun in den Gleichungen (1.), wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b}$ gegeben sind, eine der vier Unbekannten, welche sämmtlich reell bleiben sollen, innerhalb gewisser Grenzen willkürlich bleibt, z. B. wenn der Anfangspunkt der Linie $\sqrt{\mathfrak{b}}$ als Nullpunkt der rechtwinkligen Coordinatensysteme angenommen wird, ihr Endpunkt eine beliebige Lage auf dem um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt{\mathfrak{b}}$ beschriebenen Kreise haben kann, so ist es auch bei den Gleichungen (2.), so kann z. B. der durch die rechtwinkligen Coordinaten η, η_1 bezeichnete Punkt eine beliebige Lage auf der durch die Gleichung $\eta^2 - \eta_1^2 = b$ bestimmten gleichseitigen Hyperbel haben. Ich führe nun die Theorie der indifferenten Formen dadurch auf die der positiven zurück, dass ich mir das veränderliche System der reellen den Gleichungen (2.) genügenden Variablen ξ, η, ξ_1, η_1 in die Gleichungen (1.) eingesetzt denke, und die dadurch entstehende positive Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ betrachte, welche ich *die der Form (a, k, b) entsprechende positive Form* nenne. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche ihre veränderlichen Coefficienten zu erfüllen haben, erhält man sofort in der brauchbarsten Gestalt, wenn man neben dem Umstand, dass $\mathfrak{a}$ nicht negativ werden kann, bedenkt, dass die Invarianten der Formen $(\mathfrak{a}+a, \mathfrak{k}+k, \mathfrak{b}+b)$ und $(\mathfrak{a}-a, \mathfrak{k}-k, \mathfrak{b}-b)$ gleich Null sind. Durch Addition und Subtraction der hierdurch gegebenen Gleichungen erhält man nämlich:

$$(3.)\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{k}^2 = k^2 - ab$$

und

$$(4.)\quad b\mathfrak{a} - 2k\mathfrak{k} + a\mathfrak{b} = 0,$$

das heisst, *die zwei Formen haben entgegengesetzt gleiche Invarianten, und ihre simultane Invariante ist gleich Null.* Hieraus folgt, dass, wenn man ein und dieselbe Substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ auf eine indifferente und die ihr ent-

sprechende positive Form anwendet, die neu entstehende positive Form der neu entstehenden indifferenten wieder entsprechend ist. An die Stelle von ξ, η, ξ_1, η_1 treten in den neuen Formen $\alpha\xi + \gamma\eta$, $\beta\xi + \delta\eta$, $\alpha\xi_1 + \gamma\eta_1$, $\beta\xi_1 + \delta\eta_1$. Ich nenne nun *vorbehaltlich einer später beizufügenden* auf einem Unterschied zwischen den drei Formen (a, k, b), (b, g, c) und (c, h, a) gegründeten *Beschränkung, eine indifferente Form* (a, k, b) *reducirt, wenn die entsprechende positive Form* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ *für irgend ein zulässiges System ihrer veränderlichen Coefficienten* nach der oben aufgestellten Definition *reducirt ist.* Man erkennt sofort, dass man zu jeder indifferenten Form (a, k, b) eine äquivalente reducirte dadurch finden kann, dass man ein beliebiges zulässiges System von Coefficienten für die entsprechende positive Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ annimmt, eine Substitution aufsucht, welche diese positive Form in eine reducirte verwandelt, und dieselbe Substitution auch auf (a, k, b) anwendet. Es sind aber nun die Bedingungen der Reduction so umzugestalten, dass ein Zurückgreifen zu der entsprechenden positiven Form erspart wird. Es soll $k^2 - ab$ mit I bezeichnet und sollen durch die Gleichungen $a + h + k = 0$; $b + k + g = 0$; $c + g + h = 0$ die drei Zahlen h, g, c definirt werden, mittels deren sich, wie hier nebenbei bemerkt sei, die Gleichung (4.) auch durch die Gleichungen

$$g\mathfrak{a} + h\mathfrak{b} + k\mathfrak{c} = 0$$

oder

$$a\mathfrak{g} + b\mathfrak{h} + c\mathfrak{k} = 0$$

ausdrücken lässt.

Ich behalte nur des geometrischen Bildes wegen die in den Gleichungen (3.) und (4.) eliminirten Grössen ξ, η, ξ_1, η_1 bei. Um alle zulässigen Werthensysteme $\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b}$ zu erhalten, ist es aber nicht nur hinreichend, den Punkt η, η_1 nur einen seiner beiden Hyperbeläste durchlaufen zu lassen, sondern auch von den zwei zugehörigen Punkten ξ, ξ_1, deren jeder gleichzeitig ebenfalls einen Hyperbelast stetig ganz durchläuft, nur einen zu berücksichtigen, oder, womit dasselbe gesagt ist, von den zwei Vorzeichen in der sich aus (3.) ergebenden Gleichung $\xi\eta_1 - \xi_1\eta = \pm\sqrt{I}$ nur eines zuzulassen, denn es würde die Vorzeichenänderung von $\sqrt{I}$ nichts Anderes bewirken, als die Vorzeichenänderung von η mit der aus ihr folgenden von ξ, oder die Vorzeichenänderung von η_1 mit der aus ihr folgenden von ξ_1, und

je nachdem b negativ oder positiv ist, führt die Vorzeichenänderung von η oder die von η_1 lediglich von einem soeben zugelassenen Werthsystem von ξ, η, ξ_1, η_1 zu einem anderen ebenfalls schon zugelassenen. Von dem Falle, dass I eine Quadratzahl ist, will ich vorläufig absehen. Als Coefficienten der indifferenten Formen nehme ich nur ganze Zahlen an, es kann dann ein äusserer Coefficient wie b nicht gleich Null werden. Geometrisch stellt sich nun $\sqrt{\mathfrak{b}}$ unmittelbar dar als die gerade vom Nullpunkte nach dem Punkte η, η_1 führende Linie, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ als die vom Nullpunkte nach dem Punkte ξ, ξ_1, oder, wie ich lieber will, die vom Punkte $-\xi, -\xi_1$ nach dem Nullpunkte führende gerade Linie, $\mathfrak{k}$ ist $\sqrt{\mathfrak{a}}\cdot\sqrt{\mathfrak{b}}$ mal dem Cosinus des Richtungsunterschiedes dieser beiden Linien. Durch Hinzufügung der Durchschnittspunkte zweier unbegrenzter Reihen äquidistanter Parallellinien erhält man dasselbe Punktensystem wie oben. Dasselbe ist aber jetzt beweglich, und zwar so, dass gleichzeitig jeder Punkt einen Ast einer ihm eigenthümlichen gleichseitigen Hyperbel in einer Richtung stetig durchläuft, während die durch die Punkte bestimmten Parallelogramme und anderen geradlinigen Figuren einen constanten Flächeninhalt behalten. Bei jeder Lage lassen sich die Punkte auf eine und nur eine Weise als die Ecken von lauter congruenten spitzwinkligen Dreiecken ansehen, wodurch je eine reducirte positive und die entsprechende indifferente Form bestimmt wird, abgesehen von der noch möglichen cyklischen Vertauschung unter $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und unter a, b, c. Es sind nun die Bedingungen anzugeben, unter welchen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ eine Reducirte werden kann, unter welchen also eine Lage des Punktsystems eintreten kann, bei welcher keine der drei Grössen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ positiv ist. Dass zugleich mit einer der drei Grössen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ auch die zwei übrigen unendlich werden und dabei nicht $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ zugleich negativ sein können, folgt, da $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nicht kleiner werden können als die absoluten Werthe von bezüglich a, b, c, also nicht kleiner als 1, sofort aus der Betrachtung des betreffenden Dreieckes, dessen Flächeninhalt ja $\pm \frac{1}{2}\sqrt{I}$ ist. Soll also bei irgend einer Lage keine dieser drei stetig veränderlichen Grössen positiv sein, so muss es mindestens zwei Lagen geben, bei welchen eine derselben gleich Null ist, wobei dann von selbst die zwei anderen negativ sein werden. Soll zum Beispiel $\mathfrak{k} = 0$ werden, so ergiebt die Gleichung (4.) als nothwendige Bedingung, dass a und b verschiedene Vorzeichen haben. Die Verbindung mit der Gleichung (3.)

erweist diese Bedingung auch als hinreichend, und ergiebt $\sqrt{\frac{-a}{b}I}$ und $\sqrt{\frac{-b}{a}I}$ als die zugehörigen Werthe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Nach denselben Gleichungen geht unter dieser Bedingung die stetige Aenderung von $\mathfrak{k}$ fortwährend nach derselben Richtung, da bei einem Maximum oder Minimum von $\mathfrak{k}$ die Determinante $\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ sein müsste. Beim Fortgang in einer bestimmten Richtung wird und bleibt also $\mathfrak{k}$ negativ, und, weil dabei $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ von den Werthen $-\mathfrak{b}$ und $-\mathfrak{a}$ aus nicht vor einem endlichen Fortgang positiv werden, aber auch nicht beide bis ins Unendliche negativ bleiben können, so wird es ein weder unendlich kleines noch unendlich grosses Intervall der Variablen geben, in welchem $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ negativ sind, in welchem also $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ reducirt ist. Dass unter der gemachten Bedingung eine und nur eine der Grössen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ durch Null hindurchgeht, folgt auch daraus, dass, wenn a und b verschiedenes Vorzeichen haben, auch entweder b und c verschiedenes, a und c gleiches, oder a und c verschiedenes, b und c gleiches Vorzeichen haben. Unter dieser Bedingung würde nun also nach der obigen Definition die Bezeichnung als reducirte Form der Form (a, k, b) beizulegen sein und zugleich auch den Formen (b, g, c) und (c, h, a), weil die entsprechenden drei positiven Formen reducirt sind. *Ich beschränke* nun aber *diese Definition dahin*, dass ich *die Bezeichnung als reducirte Form nur noch solchen indifferenten Formen beilege, in deren entsprechenden positiven Formen der mittlere Coefficient gleich Null werden kann*, was von den drei angegebenen Formen nur bei zweien möglich ist. Das *Criterium für eine* so definirte *reducirte indifferente Form* besteht demnach einfach darin, *dass die zwei äusseren Coefficienten entgegengesetzte Vorzeichen haben.* Die Gleichung $k^2 - ab = I$ zeigt sofort, dass es bei gegebener Invariante nur eine endliche Anzahl reducirter ganzzahliger indifferenter Formen giebt. Um von zwei eigentlich äquivalenten reducirten Formen (a, k, b) und $(b, -k, a)$ nur eine angeben zu müssen, füge ich noch die *weitere Beschränkung* für die *Definition reducirter Formen* bei, dass der *erste Coefficient positiv* sein soll, wonach also *von den drei Formen* (a, k, b), (b, g, c), (c, h, a) *immer nur eine reducirt* sein kann.

b) Perioden. Hauptreducirte.

Die Frage, welche reducirte indifferente Formen einander äquivalent sind, erledigt sich nach den getroffenen Dispositionen so zu sagen von selbst. Geht nämlich die reducirte indifferente Form (a, k, b) mittels irgend einer Substitution in die reducirte Form (a', k', b') über, also die positive Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ durch dieselbe Substitution in die Form $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$, so werden die Gleichungen (3.) und (4.), ebenso wie durch $a, k, b, \mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b}$, auch durch $a', k', b', \mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}'$ erfüllt und bilden ebenso die einzige Beschränkung für die veränderlichen Grössen. Wie also unter den zulässigen Lagen des Punktsystems solche vorkommen mussten, bei welchen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ reducirt war, so müssen unter diesen Lagen auch solche vorkommen, bei welchen $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$ reducirt ist. Man braucht also lediglich das Punktsystem successive alle zulässigen Lagen annehmen zu lassen, bei jeder Lage die reducirte positive Form und die Substitution, mittels welcher sie aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ hervorgeht, zu bestimmen, und mittels derselben Substitutionen aus (a, k, b) andere Formen abzuleiten, so sind die letzteren die sämmtlichen zu (a, k, b) äquivalenten reducirten Formen. Man erhält zugleich die sämmtlichen Substitutionen von (a, k, b) in sich selbst von der Determinante 1, denn diese sind eben die Substitutionen der reducirten Form (a, k, b) in reducirte Formen (a', k', b'), deren Coefficienten mit denen von (a, k, b) numerisch übereinstimmen. Um die zu (a, k, b) äquivalenten Reducirten zu finden, nehme man zum Beispiel an, es sei a positiv, b und c negativ, so ist (a, k, b) reducirt für gewisse Lagen des Punktsystems, oder, wie ich mich ausdrücken will, für ein gewisses *Intervall*, welches nämlich beginnt bei $\mathfrak{k} = 0$ und endigt bei $\mathfrak{h} = 0$. Wird dieser Endpunkt überschritten, wird also $\mathfrak{h} > 0$ oder, was dasselbe ist, $-\mathfrak{k} > \mathfrak{a}$, so ist die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ geeignet, aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ wieder eine reducirte Form abzuleiten. Durch dieselbe Substitution wird aus (a, k, b) die Form $(a, -h, c)$ oder $(a, a+k, a+2k+b)$ abgeleitet, welche also wieder eine reducirte Form ist, und ebenso dem folgenden Intervall entspricht, wie (a, k, b) dem eben betrachteten. Wären, was der zweite und allein noch zu betrachtende Fall ist, a und c positiv, b negativ, so wäre (a, k, b) reducirt für das Intervall von $\mathfrak{k} = 0$ bis $\mathfrak{g} = 0$. Jenseits dieses Endpunktes würde $\mathfrak{g} > 0$ oder, was dasselbe ist, $-\mathfrak{k} > \mathfrak{b}$, und wäre die

Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ geeignet, aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ wieder eine reducirte Form abzuleiten. Durch dieselbe Substitution würde aus (a, k, b) die Form $(c, -g, b)$ oder $(a + 2k + b, k + b, b)$ abgeleitet, welche dann also die auf (a, k, b) folgende reducirte Form wäre. Da die neuen Formen wieder dieselben Eigenschaften haben wie die Form (a, k, b) in dem ersten oder zweiten betrachteten Falle, insbesondere auch an den Anfangspunkten der Strecken, für welche sie reducirt sind, der mittlere Coefficient der ihnen entsprechenden positiven Formen gleich Null wird, so erkennt man, dass aus jeder so erhaltenen reducirten Form immer wieder eine neue abzuleiten ist durch Anwendung einer bestimmten der zwei Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, je nachdem nämlich der dadurch neu entstehende äussere Coefficient negativ oder positiv ist. Da es jedoch nur eine endliche Anzahl reducirter Formen von einer bestimmten Invariante giebt, so erkennt man, dass von den neu entstehenden Formen einmal eine mit einer schon dagewesenen übereinstimmen muss, und, da durch die Coefficienten einer Form die auf sie weiter anzuwendende Substitution also auch die folgende Form vollständig bestimmt ist, so erkennt man, dass *die ganze Reihe äquivalenter reducirter Formen durch eine endliche sich periodisch unendlich oft wiederholende Anzahl solcher Formen gebildet wird.* Dass diese Periode sich nicht nur in der besprochenen, sondern auch in der entgegengesetzten Richtung ins Unendliche fort wiederholt, folgt daraus, dass auch in dieser Richtung jede folgende reducirte Form durch die vorausgehende allein bestimmt ist. Das Gesetz der Aufeinanderfolge der verschiedenen reducirten Formen lässt sich auch, abgesehen der Kürze wegen von der willkürlichen Festsetzung $a > 0$, einfach so ausdrücken, dass, wenn von den drei Coefficienten a, b, c einer Form, welche der Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab = 4I$ genügen, a und c dasselbe Vorzeichen haben, b das entgegengesetzte, diese reducirte Form zwischen zwei andere reducirte Formen fällt, in deren einer a und b dieselben sind, für c aber der andere dieser Gleichung ebenfalls entsprechende Werth gesetzt wird, in deren anderer b und c dieselben sind, für a aber der andere dieser Gleichung genügende Werth gesetzt wird.

Besonders aus allen reducirten Formen hervorgehoben und *Haupt-*

reducirte genannt zu werden verdienen diejenigen reducirten Formen, welche beim Fortgang in der erst betrachteten Richtung nicht durch dieselbe der beiden Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ in die folgende übergehen, durch welche sie aus der vorausgegangenen entstanden sind. Die übrigen Reducirten kann man *Zwischenreducirte* nennen, und ich sage von einer Zwischenreducirten (a, k, b): sie liegt auf der *Strecke* von a oder auf der Strecke von b, je nachdem es der Coefficient a oder der b ist, welcher auch in der vorausgehenden und in der folgenden Reducirten vorkommt, während ich von einer Hauptreducirten (a, k, b) sowohl sage: sie liegt auf der Strecke von a, als: sie liegt auf der Strecke von b. Die charakteristische Eigenschaft, durch welche sich (a, k, b), wenn es eine *Hauptreducirte* ist, von Zwischenreducirten unterscheidet, besteht darin, dass *nicht nur a und b, sondern auch $a-2k+b$ und $a+2k+b$ entgegengesetzte Vorzeichen haben*, was sich auch so ausdrücken lässt, dass der absolute Werth von k nicht nur kleiner als $\sqrt{I}$, sondern auch grösser als der von $\frac{1}{2}(a+b)$ ist. Durch I, a und k allein ausgedrückt wird die letztere Bedingung, wenn man durch Klammern ( ) andeutet, dass von der eingeklammerten Grösse der absolute Werth zu nehmen ist, $2a(k) > a^2+k^2-I > -2a(k)$ oder $(a-(k)) < \sqrt{I} < a+(k)$. Die Bedingung $(a-(k)) < \sqrt{I}$ wird neben der $(k) < \sqrt{I}$ nur dann von Bedeutung, wenn $a > \sqrt{I}$ ist, und zeigt, dass in diesem Falle neben (a, k, b) bei negativem k auch die durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ aus (a, k, b) hervorgehende Form $(a, a+k, a+2k+b)$, bei positivem k aber die durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ aus (a, k, b) hervorgehende Form $(a, k-a, a-2k+b)$ Reducirte, und zwar, da $2a-(k) > \sqrt{I}$ würde, Hauptreducirte ist. Die Bedingung $\sqrt{I} < a+(k)$ wird nur dann von Bedeutung, wenn $a < \sqrt{I}$ ist, und giebt sofort die auch für den vorigen Fall giltige Regel an, nach welcher, wenn irgend eine Reducirte mit dem ersten Coefficienten a gegeben ist, unmittelbar die zwei Hauptreducirten zu finden sind, welche auf der Strecke von a liegen. Die mittleren Coefficienten der sämmtlichen auf dieser Strecke liegenden Reducirten bilden ja eine arithmetische Reihe mit dem Modulus a, von deren Gliedern immer mindestens zwei zwischen $+\sqrt{I}$ und $-\sqrt{I}$ fallen. Die mittleren Coefficienten der zwei Hauptreducirten sind nun immer

das erste und letzte derjenigen Glieder dieser Reihe, welche zwischen $+\sqrt{I}$ und $-\sqrt{I}$ fallen. Von diesen zwei Coefficienten kann keiner gleich Null werden, sie haben immer entgegengesetzte Vorzeichen. Dass dieselben Schlüsse gelten für die Reducirten, welche auf der Strecke eines dritten, also negativen Coefficienten liegen, bedarf keiner näheren Besprechung. Ist (a, k, b) eine Hauptreducirte mit negativem mittleren Coefficienten, so zeigt das Besprochene, dass die in der früher angenommenen Richtung auf sie folgende Hauptreducirte aus (a, k, b) durch eine Substitution $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ hervorgeht, in welcher die positive Zahl β die grösste in $\frac{\sqrt{I}-k}{a}$ enthaltene ganze Zahl ist. Ist dagegen in einer Hauptreducirten (a, k, b) der mittlere Coefficient positiv, so geht die folgende Hauptreducirte aus ihr durch eine Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$ hervor, in welcher die positive Zahl γ die grösste in $\frac{\sqrt{I}+k}{-b}$ enthaltene ganze Zahl ist.

Würde ich durch Hinzufügung der Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ nach den Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$ und vor den darauf folgenden $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ meine Hauptreducirten so darstellen, dass ihre mittleren Coefficienten immer positiv wären, was ich besonders wegen der Anwendung auf die ternären Formen unterlasse, so wären sie einzeln und der Reihenfolge nach identisch mit den Formen, welche von *Gauss* einfach reducirte Formen genannt werden (Disquisitiones arithmeticae art. 183). Die Bedingungen $0 < k < \sqrt{I}$ und $((a)-k) < \sqrt{I} < (a)+k$, in welche sich dann die oben angegebenen verwandeln würden, zeigen sich sofort als identisch mit den *Gauss*ischen. Die Darstellung, welche *Dirichlet* (Abhandlungen der Berliner Academie für 1854, oder Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von *Dedekind*) für die betreffenden Bedingungen gegeben hat, dass nämlich abgesehen von der Unterscheidung zwischen erster und zweiter Wurzel, welche den mittleren Coefficienten als positiv bestimmt, von den zwei Wurzeln ω der Gleichung $a+2k\omega+b\omega^2=0$ die eine positiv, die andere negativ, die eine ein ächter, die andere ein unächter Bruch sei, kommt vollständig zurück auf meine rein arithmetischen

Bedingungen, dass sowohl a und b, als auch $a-2k+b$ und $a+2k+b$ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

c. Die Réduites principales von Hrn. *Hermite*.

An Stelle meiner Hauptreducirten kommt Hr. *Hermite* zu anderen von ihm reduites principales genannten Formen, welche also auch von den *Gauss*ischen Reducirten abweichen, gerade dadurch, dass Hr. *Hermite* die *Gauss*ische Definition für reducirte positive Formen zu Grunde legt. Die von Hrn. *Hermite* (dieses Journal Bd. 41, S. 204) benützte positive Form φ stimmt, was das Verhältniss der Coefficienten unter einander betrifft, mit meiner Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ überein, wenn man das dortige λ durch $\left(\frac{\xi-\xi_1}{\xi+\xi_1}\right)^2$ ersetzt. Alle nach meiner Definition Reducirten gehören nun abgesehen von der etwa noch anzuwendenden Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ auch zu den von Hrn. *Hermite* réduites genannten, weil, wenn in $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ der mittlere Coefficient gleich Null ist, auch $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ oder $(\mathfrak{b}, -\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$ nach der *Gauss*ischen Definition reducirt ist. Dasselbe gilt nicht umgekehrt. Es geht nämlich zwar $\mathfrak{k}$ immer durch Null, wenn für $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ die beiden Grenzen der *Gauss*ischen Reduction die $\mathfrak{k}=-\frac{\mathfrak{a}}{2}$ und $\mathfrak{k}=\frac{\mathfrak{a}}{2}$ sind; sind sie aber $\mathfrak{k}=-\frac{\mathfrak{a}}{2}$ und $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, oder $\mathfrak{k}=\frac{\mathfrak{a}}{2}$ und $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, in welchen Fällen (a, k, b) von Hrn. *Hermite* réduite principale genannt wird, so lässt sich dies nicht behaupten, und ist auch nicht der Fall, wenn a und b gleiche Vorzeichen haben. Sind dann a und b positiv, k negativ, so wird die Reihenfolge der Reducirten nach *Hermite*

$$(b, g, c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(b, -k, a)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}(a, k, b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(a, -h, c),$$

während bei mir unmittelbar (b, g, c) durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ in $(a, -h, c)$ übergeht. In diesem Falle sind (b, g, c) und $(a, -h, c)$ Hauptreducirte, da nach der *Hermite*schen Bedingung für réduites principales, nämlich der $(k) > (a+b)$ oder vielmehr $(k) \geqq (a+b)$, welche sich unmittelbar aus meiner Gleichung (4.) ergiebt, in diesem Falle $a+k+b \leqq 0$, also um so mehr $a+4k+4b < 0$ und $4a+4k+b < 0$, also $b-2g+c < 0$ und $a-2h+c < 0$ sind,

während $a = b + 2g + c > 0$ und $b = a + 2h + c > 0$ sind. Dagegen ist in diesem Falle im Allgemeinen (b, g, c) keine réduite principale, denn der absolute Werth des mittleren Coefficienten $-k-b$ ist kleiner als der der Summe der äusseren, nämlich als $-k-b+(-a-k-b)$. Dasselbe gilt für $(a, -h, c)$. Nur im Falle $a+k+b=0$ sind auch (b, g, c) und $(a, -h, c)$ réduites principales. Anfangs- und Endpunkt der Strecke, für welche (a, k, b) überhaupt réduite ist, fallen dann zusammen. Im Falle $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$ hätte dasselbe, was soeben für die Form (a, k, b) durchgeführt worden ist, für die Form $(b, -k, a)$ gegolten. Wären a und b negativ, so gälte völlig das Analoge. Alle réduites principales (a, k, b), in welchen $a > 0$, $b < 0$ ist, sind auch Haupreducirte, von allen, in welchen $a < 0$, $b > 0$ ist, sind es die associées opposées $(b, -k, a)$, denn aus $(k) \geq (a+b)$ folgt $(k) > \left(\frac{a+b}{2}\right)$. Die *Hermite*schen Perioden von réduites principales, von welchen also eine unter Umständen an die Stelle von zwei *Gauss*ischen Reducirten tritt, können demnach weniger Formen enthalten, als die *Gauss*ischen Perioden, wie ja auch bei der Entwicklung in einen periodischen Kettenbruch die Anzahl der Partialnenner einer Periode kleiner werden kann, wenn man Reste von verschiedenen Vorzeichen zulässt. Von den *Hermite*schen Bedingungen $-(k) \gtreqless a+b \leq (k)$ drückt, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben, die eine aus, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, die andere, dass $(\mathfrak{b}, -\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$ eine *Gauss*ische Reducirte werden kann, wenn aber a und b gleiche Vorzeichen haben, drückt die eine beides, die andere gar nichts aus. Wenn man diese Bedingungen so umgestaltet, dass sie sich zur unmittelbaren Berechnung der aufeinander folgenden réduites principales eignen, dass sie nämlich ausser I und k nur einen der äusseren Coefficienten, zum Beispiel a enthalten, so wird mittels $a^2-(ak) \gtreqless -ab \leq a^2+(ak)$ aus ihnen $a^2-(ak)+k^2 \gtreqless I \leq a^2+(ak)+k^2$. Hiernach ist es nun leicht, von den mittleren Coefficienten zweier auf der Strecke von a liegender, also durch Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ in einander übergehender réduites principales den einen aus dem andern abzuleiten. Ist nämlich $a^2 > I$, so liegt der eine jener Coefficienten zwischen $-\frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$ und $-\frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$, der

andere zwischen $\frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$ und $\frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$, wird also $(\beta)=1$. Ist aber $a^2 < I$, so liegt von diesen zwei Coefficienten der eine zwischen $-\frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$ und $\frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$, der andere zwischen $-\frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$ und $\frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2}$, wodurch für β im Allgemeinen ein Werth, im Fall der Erreichung einer der Grenzen $a+b\pm k=0$ aber zwei um eins verschiedene Werthe bestimmt werden. In der That ist z. B. bei $a+b+k=0$ neben (a, k, b) auch $(a, -h, c)$ zugleich mit (b, g, c), $(b, -k, a)$, (c, h, a) und $(c, -g, b)$ réduite principale, wie aus der Erfüllbarkeit der Gleichungen $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=-2\mathfrak{k}$ auch unmittelbar folgt.

Eine Zwischenreducirte (a, k, b) liegt offenbar auf der Strecke von a oder von b, je nachdem das Vorzeichen von $a-2k+b$ und $a+2k+b$, also auch von $a+b$ mit dem von b oder von a übereinstimmt, je nachdem also a kleiner oder grösser ist als $-b$. Dasselbe in Bezug auf die absoluten Werthe von a und b gilt für die *Hermite*schen réduites intermédiaires, wie meine Gleichung (4.) in Verbindung mit der nach dem Obigen bei diesen Formen immer möglichen Gleichung $\mathfrak{k}=0$ ergiebt. Von den auf der Strecke von a liegenden Zwischenreducirten verdient diejenige (a, k, b) besonders hervorgehoben zu werden, bei welcher der absolute Werth von k der kleinste, also $<\frac{a}{2}$, wird, statt welcher man, wenn in einer Form $k=\frac{a}{2}$, also in einer anderen $k=-\frac{a}{2}$ wird, beliebig die eine oder andere nehmen kann. Die entsprechende positive Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ ist eine *Gauss*ische Reducirte für den Minimalwerth von $\mathfrak{a}$. Das Analoge gilt für die auf der Strecke von b gelegenen Zwischenreducirten (a, k, b). Die so hervorgehobenen Formen gehören zu den von *Legendre* (Théorie des nombres, 3me ed., I partie, § 13) als reduites a la forme ordinaire bezeichneten. Wenn es aber auf der Strecke von a keine Zwischenreducirte giebt, also eine der zwei auf der Strecke liegenden Hauptreducirten die Bedingung $(2k) < a$ oder beide die $(2k)=a$ erfüllen, so kann es sein, dass für diese eine oder diese beiden $-b<(2k)$ ist. *Legendre* schreibt nun, um auch für eine solche Strecke eine ähnliche Form zu erhalten, vor, weitere Sub-

stitutionen auf die erhaltene Form anzuwenden, bis der absolute Werth des doppelten mittleren Coefficienten den keines äusseren mehr überschreitet. Hierzu ist aber eine einzige Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{vmatrix}$ hinreichend, weil die Verkleinerung von (k) eine weitere Vergrösserung von a hervorbringt. Die so zu erhaltende Form wird also offenbar dieselbe, welche man für die Strecke von b ebenfalls erhält. Es ist also nicht zufällig, dass in dem von *Legendre* Seite 135 durchgeführten Beispiel eine Form zwei Mal nach einander vorkommt.

Aus den letztbesprochenen Reducirten ist auch die von *Gauss* (Disquisitiones arithmeticae art. 223) als forma repraesentans ihrer Klasse bezeichnete Form ausgewählt.

d) Die Invariante eine negative Quadratzahl.

Durch jede der oben von einer gewissen Stelle an ausgeschlossenen indifferenten Formen (a, k, b), in welchen $I = k^2 - ab$ eine Quadratzahl ist, lässt sich die Null eigentlich darstellen, jeder solchen Form sind also Formen äquivalent, in welchen der erste Coefficient $= 0$ ist. Es sei (a, k, b) selbst eine solche Form, sei k die positive Quadratwurzel aus der als von Null verschieden angenommenen Quadratzahl I, und sei zunächst b nicht gleich Null, auch nicht durch $2k$ theilbar. Bei Anwendung des unteren Vorzeichens in der früher benutzten Gleichung $\xi\eta_1 - \xi_1\eta = \pm\sqrt{I}$ wird dann $b\xi = k(\eta + \eta_1) = b\xi_1$. Es kann sich dann also, während der Punkt η, η_1 einen Ast seiner gleichseitigen Hyperbel durchläuft, der Punkt ξ, ξ_1 nur auf einer der zwei geraden Linien bewegen, in welche seine gleichseitige Hyperbel degenerirt, und zwar auf dieser nur auf der einen Seite des Nullpunktes, da der absolute Werth derjenigen der zwei Grössen η und η_1, welche ihr Vorzeichen nicht ändert, den der anderen stets überwiegt. Werden η und η_1 mit entgegengesetzten Vorzeichen unendlich, so nähern sich, wie aus der Gleichung $(\eta - \eta_1)(\eta + \eta_1) = b$ ersichtlich, ξ und ξ_1 dem Grenzwerthe Null, und mit ihnen auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{k}$. Soll nun $(0, k, b)$ reducirt sein, sollen also durch die entsprechende positive Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ die Bedingungen $\mathfrak{k} < 0$: $-\mathfrak{k} < \mathfrak{a}$; $-\mathfrak{k} < \mathfrak{b}$ erfüllt werden können, so müssen nach der aus der Gleichung (4.) entstehenden Gleichung $\mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = 2k\mathfrak{k}$ die Zahlen b und k ver-

schiedene Vorzeichen haben, ferner muss $\frac{-b}{2k} < 1$ sein. Erfüllt $(0, k, b$ diese Bedingungen nicht, so betrachte ich statt dieser Form die ebenso zu bezeichnende neue durch eine Substitution $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ aus ihr hervorgehende, in welcher $-2k < b < 0$ ist. Die dritte Bedingung ist dann nach dem eben Bemerkten für Punkte η, η_1, welche auf ihrem Hyperbelast nach einer bestimmten Richtung zu hinreichend weit entfernt sind, von selbst erfüllt und zwar von dem durch $\mathfrak{g} = 0$, also $\mathfrak{b} = k\sqrt{\frac{-b}{c}} = k\sqrt{\frac{-b}{2k+b}}$ bestimmten Punkte an. Ueberschreitet man diesen Punkt in der entgegengesetzten Richtung, so ist zunächst eine Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ anzuwenden, um aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ wieder eine reducirte positive, und damit aus $(0, k, b)$ eine neue reducirte indifferente Form zu erlangen. Das für den Fall, dass I keine Quadratzahl ist, oben entwickelte Verfahren zur Ableitung der auf einander folgenden Reducirten lässt sich nun aus denselben Gründen auch auf diese Form $(2k + b,\ k + b,\ b)$ und die demnach auf sie folgenden anwenden, bis man hierbei, während die ursprünglichen Punkte ξ, ξ_1 und η, η_1 sich auf ihren Bahnen immer in derselben Richtung fortbewegen, zu einer Form (a', k', b') gelangt, in welcher $c' = 0$ ist. Eine solche Form müsste jedenfalls unmittelbar vorausgegangen sein, ehe eine Form (a'', k'', b'') kommen könnte, in welcher a'' oder b'' gleich Null wäre, weil ja, je nachdem die letztere Form aus der ersteren durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ oder die $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ hervorgeht, a'' oder b'' gleich c' ist. Eine solche Form (a', k', b') muss auch wirklich kommen, denn erstens kann es von den übrigen Reducirten, in welchen allen ja die äusseren Coefficienten entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen, nur eine endliche Anzahl geben, ferner kann von diesen keine mehr als einmal vorkommen, weil ja hieraus allein wie oben folgen würde, dass dieselben gleiche Perioden nicht nur nach vorwärts, sondern auch nach rückwärts bildeten, endlich ist aus denselben Gründen wie oben keine dieser übrigen Reducirten von der Art, dass ihre entsprechende positive Form reducirt bleiben könnte, wenn einer ihrer veränderlichen Coefficienten unendlich wird. Diese letztere Eigenschaft hat nun aber die Form (a', k', b'), in welcher

$a' + 2k' + b' = 0$ ist. In letzterer Form ist $0 < a' < -2h'$. Es ist also $(\mathfrak{c}', \mathfrak{b}', \mathfrak{a}')$ dem bei der Form $(0, k, b)$ Betrachteten analog reducirt, während das bewegliche Eck ξ', ξ'_1 des durch $(\mathfrak{c}', \mathfrak{b}', \mathfrak{a}')$ bestimmten Dreiecks von der durch $\mathfrak{k}' = 0$, also $-\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}'$ bestimmten Lage an in der bis dahin verfolgten Richtung auf seinem Hyperbelast weiter rückt bis ins Unendliche. Gleichzeitig werden auch die ursprünglichen Veränderlichen ξ, ξ_1, η, η_1, letztere beide mit gleichen Vorzeichen, unendlich. *An Stelle der unendlich oft wiederholten Periode reducirter Formen tritt also im Falle, dass $k^2 - ab$ eine Quadratzahl ist, eine Reihe nur einmal vorkommender reducirter Formen,* in deren erster (a, k, b) der Coefficient $a = 0$ ist, in deren letzter (a', k', b') aber $c' = 0$ ist. Da gleichzeitig mit $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$ auch $(\mathfrak{c}', \mathfrak{b}', \mathfrak{a}')$ reducirt ist, hat auch die indifferente Form $(0, h', a')$ den Charakter einer Reducirten. Die Subtitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$, durch welche die nicht wesentlich von (a', k', b') verschiedene Form $(0, h', a')$ aus $(0, k, b)$ hervorgeht, entsteht durch die Zusammensetzung der nur positive Coefficienten enthaltenden Substitution, durch welche (a', k', b') aus $(0, k, b)$ hervorgeht, mit der Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$. Hieraus folgt $-\alpha > \beta > 0$; $-\gamma > \delta > 0$. Aus $(0, k, b)(\alpha, \gamma) = 0$ folgt ferner, wenn m den grössten gemeinsamen Divisor von $2k$ und b bezeichnet, $\alpha = \frac{b}{m}$; $\gamma = \frac{-2k}{m}$, und in Betracht des eben Bemerkten sind β und δ durch die Gleichung $\frac{b}{m}\delta + \frac{2k}{m}\beta = 1$ vollständig bestimmt. Drückt man nun h' und a' durch $k, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus, so erhält man $h' = -k$ und $a' = m\delta$. Da die Formen $(0, k, 2kn)$ den Formen $(0, k, 0)$ und $(0, -k, 0)$ eigentlich äquivalent sind, und in den, den letzteren entsprechenden positiven Formen der mittlere Coefficient constant gleich Null ist, kann man nun allgemein aussprechen: In jeder Klasse äquivalenter zur Invariante $-k^2$ gehörender Formen giebt es eine und nur eine Form $(0, k, b)$, in welcher $2k > -b \geqq 0$ ist, zugleich mit einer Form $(0, -k, a')$, in welcher $2k > a' \geqq 0$ und $\frac{b}{m} \cdot \frac{a'}{m} \equiv 1 \left(\text{mod. } \frac{2k}{m}\right)$ ist. Die der letzteren Form eigentlich äquivalente $(a', k, 0)$ wird von *Gauss* als Reducirte bezeichnet. (Disq. arithm. 206). Da ihr die Form $(c, k, 0)$, in welcher ich $b + 2k$ mit c bezeichne, uneigentlich

äquivalent ist, so ist der von *Gauss* (art. 210) für zwei uneigentlich äquivalente Reducirte $(c, k, 0)$ und $(a'. k, 0)$ bewiesene Satz $c a' \equiv m^2$ (mod. $2\,mk$) unmittelbar in der soeben angegebenen Congruenz enthalten. Nach derselben Betrachtung, die auch bei den positiven Formen angestellt wurde, erkennt man, dass die Formen $(0, k, b)$ und die ihnen äquivalenten keine Substitutionen in sich selbst von der Determinante 1 zulassen ausser denen $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Ist $I = 0$, so liegen die drei Eckpunkte $\eta, \eta_1, -\xi, -\xi_1, 0, 0$ des einer Form (a, k, b) entsprechenden Dreieckes immer in gerader Linie. Das Dreieck wird also immer stumpfwinklig sein, wenn nicht zwei der drei Punkte zusammenfallen, was nur möglich ist, wenn $a = 0$, oder $b = 0$, oder $c = 0$ ist. Es können also, wenn man sich auf primitive Formen beschränkt, d. h. auf solche Formen, deren Coefficienten keinen gemeinsamen Divisor haben, nur die Formen $(0, 0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, 0)$, $(\pm 1, \mp 1, \pm 1)$ reducirte sein, welche zu einander in der Beziehung stehen, wie (a, k, b), (c, h, a), (b, g, c). Man erhält also nur zwei primitive Klassen, welche durch die Formen x^2 und $-x^2$ repräsentirt werden können.

III. Ternäre positive Formen.

a) Gleichartige Coefficienten. Neue Reductionsbedingungen.

Für eine beliebige ternäre quadratische Form $\mathfrak{a}x^2 + \mathfrak{b}y^2 + \mathfrak{c}z^2 + 2\mathfrak{g}yz + 2\mathfrak{h}zx + 2\mathfrak{f}xy$ sollen neben neu einzuführenden auch die üblichen Bezeichnungen $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{f} \end{pmatrix}(x, y, z)$ oder $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{f} \end{pmatrix}$ oder $\mathfrak{f}\,(x, y, z)$ oder $\mathfrak{f}$ gebraucht werden. Den Coefficienten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ füge ich bisweilen noch einen vierten $\mathfrak{d}$ bei, den Coefficienten $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{f}$ noch drei, $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. Die zehn Coefficienten sollen den vier Gleichungen $\mathfrak{a} + \mathfrak{l} + \mathfrak{h} + \mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{m} + \mathfrak{f} + \mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{c} + \mathfrak{n} + \mathfrak{g} + \mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{d} + \mathfrak{l} + \mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 0$ genügen, sodass $\mathfrak{d} = \mathfrak{f}\,(1, 1, 1)$ ist. Die Beziehungen zwischen diesen zehn Coefficienten werden veranschaulicht, wenn man sie, entsprechend der Anordnung $\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{f} & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c} \end{vmatrix}$ der gewöhnlichen Coefficien-

ten, in das System $\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h} & \mathfrak{l} \\ & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} & \mathfrak{m} \\ & & \mathfrak{c} & \mathfrak{n} \\ & & & \mathfrak{d} \end{vmatrix}$ zusammenstellt, oder dadurch, dass man anstatt $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ die Bezeichnungen $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$, $[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{d}]$, $[\mathfrak{b}\mathfrak{d}]$, $[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ gebraucht, wobei die Reihenfolge zweier in einer Klammer stehender Buchstaben gleichgültig, also z. B. $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = [\mathfrak{c}\mathfrak{b}]$ ist. Die 24 Formen, welche aus einer unter ihnen, der Form $\mathfrak{f}$, durch die Permutationen der Coefficienten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ verbunden mit den zugehörigen der Coefficienten $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ hervorgehen, sind einander äquivalent, sie gehen in einander über durch die Verbindungen je einer der zwei Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ mit je einer der drei $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ und je einer der vier $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Die Beziehungen zwischen diesen 24 Formen treten noch klarer hervor, wenn man die Formen durch $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ allein ausdrückt. Unter Einführung einer vierten Variable t nämlich, welche zunächst gleich Null sein soll, wird

$$(5.)\quad \mathfrak{f} = -\mathfrak{g}(y-z)^2 - \mathfrak{h}(z-x)^2 - \mathfrak{k}(x-y)^2 - \mathfrak{l}(x-t)^2 - \mathfrak{m}(y-t)^2 - \mathfrak{n}(z-t)^2.$$

Da man den Werth Null der Zahl t, ohne den Werth der Form zu ändern, um eine beliebige Zahl vergrössern oder verkleinern kann, wenn man dieselbe Aenderung auch mit x, y und z vornimmt, so sind die *sechs Coefficienten* unter einander *gleichartig*. Die Vertauschungen, welche unter ihnen vorgehen bei den 24 Vertauschungen der Coefficienten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ und der zugehörigen Variablen x, y, z, t, und welche lediglich die Reihenfolge der sechs Glieder in (5.) verändern, sind dadurch zu kennzeichnen, dass je zwei Coefficienten, welche bei der ersten obigen Schreibweise nicht mit ein und derselben der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ eine Horizontal- oder Verticalreihe gemein haben, oder bei der zweiten keines der Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gemeinsam haben, zu einem Paare vereinigt sind, welches bei keiner Vertauschung unter

[illegible] dem System $\begin{vmatrix} g & h & f \\ l & m & n \end{vmatrix}$
[illegible] einander vertauscht
[illegible]: es können auch
[illegible], jedoch nur
[illegible] Paar, was, wenn
[illegible] werden, den Ver-
[illegible]

[illegible] a, b, c, d für diese
[illegible] bezeichnet $(t-x)$,
[illegible] entsprechend, wobei wieder
[illegible] a mit (34), b mit (41),
[illegible] dasselbe ist, $b+21+a$
[illegible] sodass von diesen sechs
[illegible] wie z. B. (12), (13), (14)
[illegible] die Indices 1, 2, 3, 4
[illegible] die Gleichung

$$[illegible] - (41)\, u_2 u_3 + (24)\, u_1 u_3$$

[illegible] $= 0$ völlige Symme-
[illegible] herrscht.

[illegible] deren Coefficienten die ersten

[illegible] der Determinante $\begin{vmatrix} a & f & h \\ f & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix}$ sind,

[illegible] und sechs wie die
[illegible] $(xX + yY + zZ) =$
[illegible] Derivirten von $f(x, y, z)$ nach
[illegible] Coefficienten $\mathfrak{D}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$,
[illegible] $+ \mathfrak{M} + \mathfrak{K} + \mathfrak{G} = 0$,
[illegible] $= \mathfrak{F}(1, 1, 1)$ genügen,
[illegible] eingeführten Indices
[illegible] durch die Substitution

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ aus $\mathfrak{F}$ hervorgeht, und deren Coefficienten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$ die Invarianten der vier oben genannten die Indices 1, 2. 3, 4 tragenden binären Formen sind, ist nicht nur symmetrisch in Bezug auf diese Indices, sondern bei Erhaltung einer cyklischen Reihenfolge, bei welcher $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{d}$ getrennt bleibt, auch in Bezug auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Setzt man abkürzend:

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{a} = \mathfrak{g}\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{P}_\mathfrak{c} = \mathfrak{l}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{l},$$
$$\mathfrak{P}_\mathfrak{b} = \mathfrak{n}\mathfrak{l} + \mathfrak{l}\mathfrak{h} + \mathfrak{h}\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{P}_\mathfrak{d} = \mathfrak{k}\mathfrak{g} + \mathfrak{g}\mathfrak{h} + \mathfrak{h}\mathfrak{k},$$

so wird diese Form

$$\mathfrak{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}, & -\mathfrak{P}_\mathfrak{a} - \mathfrak{h}\mathfrak{m}, & -\mathfrak{k}\mathfrak{n} + \mathfrak{h}\mathfrak{m}, & -\mathfrak{P}_\mathfrak{d} - \mathfrak{h}\mathfrak{m} \\ & \mathfrak{B} - 2\mathfrak{K} + \mathfrak{A}, & -\mathfrak{P}_\mathfrak{b} - \mathfrak{h}\mathfrak{m}, & -\mathfrak{g}\mathfrak{l} + \mathfrak{h}\mathfrak{m} \\ & & \mathfrak{C} - 2\mathfrak{G} + \mathfrak{B}, & -\mathfrak{P}_\mathfrak{c} - \mathfrak{h}\mathfrak{m} \\ & & & \mathfrak{C} \end{vmatrix}.$$

Damit $\mathfrak{f}$ eine positive Form sei, durch welche also, die Variablen wie die Coefficienten als reell vorausgesetzt, nur positive Zahlen dargestellt werden können, ist, da ich vorläufig den Fall $I = 0$ ausschliesse, nothwendig, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ und I positiv sind, hinreichend aber, wie die Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{f} = (\mathfrak{a}x + \mathfrak{k}y + \mathfrak{h}z)^2 + \mathfrak{C}y^2 - 2\mathfrak{G}yz + \mathfrak{B}z^2$ ergiebt, schon, dass $\mathfrak{a}$ und die binäre Form $(\mathfrak{C}, -\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$, also, dass ausser I noch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$, oder irgend zwei in gleichen Beziehungen zu einander stehende Coefficienten positiv sind.

Anstatt der *Seeber*ischen Bedingungen für eine reducirte positive Form, dass nämlich $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{c}$; $(2\mathfrak{g}) \leqq \mathfrak{b}$; $(2\mathfrak{h}) \leqq \mathfrak{a}$; $(2\mathfrak{k}) \leqq \mathfrak{a}$, und entweder $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ negativ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 2\mathfrak{g} + 2\mathfrak{h} + 2\mathfrak{k} \geqq 0$, oder keine der Zahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ negativ sei, führe ich für meine Zwecke *andere Reductionsbedingungen* ein, welche nur bei Stattfinden des ersteren Falles im Wesentlichen mit den *Seeber*ischen übereinstimmen, und immer darin bestehen, dass *von den Zahlen* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ *keine positiv* sein soll. Während die *Seeber*ischen Bedingungen bewirken, dass wenn $\mathfrak{f}'$ eine zu $\mathfrak{f}$ äquivalente Form ist, in welcher ebenfalls $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{c}'$ ist, nicht $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a}$, oder $\mathfrak{b}' < \mathfrak{b}$, oder $\mathfrak{c}' < \mathfrak{c}$ sein kann, bewirken die nun zu rechtfertigenden meinigen, welche die Symmetrie zwischen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nicht verletzen, dass an die Stelle von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ oder also von $-\mathfrak{g} - \mathfrak{h} - \mathfrak{k} - \mathfrak{l} - \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$ in keiner äquivalenten Form eine grössere Summe tritt. Eine auf die Form $\mathfrak{f}$ anzu-

wendende Substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ bezeichne ich, um $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ ebenso unmittelbar wie $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{f}'$ angeben zu können, mit $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$, worin $\delta, \delta_1, \delta_2$ dadurch bestimmt sein sollen, dass die Summe der je vier in einer Horizontalreihe stehenden Coefficienten gleich Null ist, oder auch mit $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$, worin $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$ sämmtlich gleich Null sind. In letzterem System kann man jedoch auch, um Symmetrie in Bezug auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ herzustellen, die je vier in einer Verticalreihe stehenden Coefficienten sämmtlich um ein und dieselbe Grösse vergrössern oder verkleinern, ohne dass dadurch eine Aenderung des Resultats der Substitution herbeigeführt wird, wenn man nämlich:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\alpha^2 + \mathfrak{b}\alpha_1^2 + \mathfrak{c}\alpha_2^2 + \mathfrak{d}\alpha_3^2 + 2\mathfrak{g}\,\alpha_1\alpha_2 + 2\mathfrak{h}\,\alpha_2\alpha + 2\mathfrak{f}\,\alpha\alpha_1 + 2\,\mathfrak{l}\,\alpha\alpha_3$$
$$+ 2\mathfrak{m}\,\alpha_1\alpha_3 + 2\mathfrak{n}\,\alpha_2\alpha_3 \text{ etc.,}$$
$$\mathfrak{f}' = \tfrac{1}{2}\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha}\cdot\beta + \tfrac{1}{2}\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_1}\cdot\beta_1 + \tfrac{1}{2}\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_2}\cdot\beta_2 + \tfrac{1}{2}\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_3}\cdot\beta_3 \text{ etc.}$$

setzt. Denn wenn z. B. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ um 1 zunehmen, so nimmt $\frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha}$ nur um $\mathfrak{a}+\mathfrak{f}+\mathfrak{h}+\mathfrak{l}$, also um Null zu, ebenso die ähnlichen Derivirten; ferner ist $\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha} + \frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_1} + \frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_2} + \frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_3} = 0$ etc. Die Anwendung der Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ auf $\mathfrak{f}$ erzeugt nun die Form $\begin{vmatrix} \mathfrak{a}+2\mathfrak{h}+\mathfrak{c}, & \mathfrak{f}+\mathfrak{g}, & \mathfrak{n}+\mathfrak{g}, & \mathfrak{l}-\mathfrak{g} \\ & \mathfrak{b}, & -\mathfrak{g}, & \mathfrak{m}+\mathfrak{g} \\ & & \mathfrak{c}, & \mathfrak{h}+\mathfrak{g} \\ & & & \mathfrak{a}+2\mathfrak{f}+\mathfrak{b} \end{vmatrix}$.
An die Stelle von $-\mathfrak{g}-\mathfrak{h}-\mathfrak{f}-\mathfrak{l}-\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ tritt also in dieser eine um $\mathfrak{g}$ kleinere Zahl, so dass diese Summe durch eine geeignete Substitution immer verkleinert werden kann, so oft $\mathfrak{g}$, oder, wie aus der Symmetrie zu schliessen, einer der Coefficienten $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ positiv ist. Ist $\mathfrak{l}$ positiv, so geht z. B. die entsprechende Substitution aus der angegebenen durch die Vertauschung von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ hervor. Die obige Substitution

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ wird dadurch $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ oder, indem ich die Glieder je einer Verticalreihe um dieselbe Grösse verändere, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, oder, indem ich die unter $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ wieder vorkommenden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ wieder an ihre ursprünglichen Stellen schaffe, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, welche $\mathfrak{f}$ in

$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{k}+\mathfrak{l}, & \mathfrak{h}+\mathfrak{l}, & -\mathfrak{l} \\ & \mathfrak{a}+2\mathfrak{h}+\mathfrak{c}, & \mathfrak{g}-\mathfrak{l}, & \mathfrak{n}+\mathfrak{l} \\ & & \mathfrak{a}+2\mathfrak{k}+\mathfrak{b}, & \mathfrak{m}+\mathfrak{l} \\ & & & \mathfrak{d} \end{vmatrix}$ verwandelt. Es ist nun auch leicht zu beweisen, dass, wenn $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ negativ sind, ausser der identischen Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ oder $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und den blosse Vertauschungen unter $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ hervorbringenden, also aus der angegebenen durch Vertauschungen der Verticalreihen entstehenden Substitutionen alle übrigen eine Vergrösserung der Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$ bewirken. Setzt man nämlich nach (5.)

$$\mathfrak{a}' = -\mathfrak{g}(\alpha_1-\alpha_2)^2 - \mathfrak{h}(\alpha_2-\alpha)^2 - \mathfrak{k}(\alpha-\alpha_1)^2 - \mathfrak{l}(\alpha-\alpha_3)^2 - \mathfrak{m}(\alpha_1-\alpha_3)^2 \\ - \mathfrak{n}(\alpha_2-\alpha_3)^2$$

und die analogen Ausdrücke für $\mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$, so erkennt man, dass bei der identischen Substitution und den erwähnten 23 anderen in die Summe $\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}'+\mathfrak{d}'$ jede der nicht negativen Zahlen $-\mathfrak{g}, -\mathfrak{h}, -\mathfrak{k}, -\mathfrak{l}, -\mathfrak{m}, -\mathfrak{n}$ zweimal eintritt je multiplicirt mit der Quadratzahl 1. Sollte also jene Summe bei irgend einer äquivalenten Form kleiner werden, so müsste in ihr wenigstens eine dieser sechs Zahlen weniger als zweimal vorkommen. Wäre dies die Zahl $-\mathfrak{g}$, so müssten von den vier Differenzen $\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_1-\beta_2$, $\gamma_1-\gamma_2$, $\delta_1-\delta_2$ mehr als zwei gleich Null sein, sie müssten also, da ihre Summe gleich Null ist, alle vier gleich Null sein, was erfordern würde, dass die Substitutionsdeterminante gleich Null wäre. Kleiner

kann also jene Summe bei keiner äquivalenten Form sein, gleich gross bei anderen als diesen 24 Formen nur in den noch näher zu besprechenden Fällen, in welchen eine oder mehrere der Zahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gleich Null sind.

Wenn $\mathfrak{f}$ reducirt ist und $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{m}$ nicht grösser ist als $\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{n}$, so ist auch die oben angegebene mit Zugrundlegung der cyklischen Reihenfolge $\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gebildete Form $\mathfrak{F}_1$ der adjungirten Klasse reducirt, da $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1$, wie aus ihren oben gegebenen Ausdrücken sofort ersichtlich ist, dann negativ oder Null sind. Jede Vertauschung unter den Zahlen $\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, bei welcher zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende getrennt bleiben, zwei aufeinander folgende nicht getrennt werden, zieht keine wesentliche Aenderung, sondern nur eine Vertauschung unter den Coefficienten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$ nach sich. Das Analoge ergiebt sich für die Fälle, in welchen $\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{n}$ nicht grösser sind als je die zwei anderen ähnlichen Producte, indem man nämlich dann die Reihenfolge $\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$ zu Grunde legt. Von den 24 gleichzeitig reducirten Formen ist bei achten die angegebene auf die Reihenfolge $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ gestützte Form der adjungirten Klasse reducirt, bei achten die auf die Reihenfolge $\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$, bei achten die auf die Reihenfolge $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$ gestützte Form. Sucht man geeignete Bedingungen, um aus den 24 gleichzeitig reducirten Formen je eine als repräsentirende Form hervorzuheben, was bei meinen Zwecken nur stören, aber bei tabellarischen Arbeiten wünschenswerth sein würde, so ergiebt das eben Betrachtete schon eine Hervorhebung von achten aus den 24 Formen. Durch die Bedingung, dass $\mathfrak{d}$ nicht kleiner als $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}$ sein soll, werden aus diesen wieder zwei hervorgehoben, welche durch die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ in einander übergehen, und etwa durch die Bedingung $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{g} < \mathfrak{k}$ von einander getrennt werden könnten.

b) Die Transformationen der Formen in sich selbst.

Geht die Form $\mathfrak{f}$ durch die Substitution S in die Form $\mathfrak{f}'$ über, und stimmen die Coefficienten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ mit den gleich geordneten Coefficienten $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{k}'$ numerisch vollständig überein, so sagt man: die Form $\mathfrak{f}$

geht durch die Substitution S in sich selbst über. Ich betrachte nur solche Substitutionen von der Determinante 1. Es ist auch genügend, solche Substitutionen bei reducirten Formen zu betrachten, weil sie sich indirect dadurch auch für die übrigen ergeben. Ist nun $\mathfrak{f}$ reducirt, und, wie ich zunächst voraussetzen will, S eine der 23 Substitutionen, durch welche die mehrgenannten 24 immer gleichzeitig reducirten Formen auseinander hervorgehen, ist ferner $\varkappa$ die Anzahl derjenigen dieser 24 Formen, welche mit $\mathfrak{f}$ völlig übereinstimmende Coefficienten haben, $\mathfrak{f}$ selbst eingeschlossen, wobei nach bekannten Principien $\varkappa$ ein Divisor von 24 sein wird, so sind folgende besondere Fälle zu betrachten, welche als Vorbilder für je die analogen aufzufassen sind.

1. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, woraus auch $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ folgt. Dann bleibt $\mathfrak{f}$ ungeändert bei den Vertauschungen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, es ist also $S = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ und $\varkappa = 2$. Dieser Fall ist zugleich Vorbild für die fünf anderen, in welchen andere Combinationen von zweien der Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die Rolle spielen, wie hier $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

2. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$. Dann bleibt $\mathfrak{f}$ ungeändert bei der mit einer Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verbundenen Vertauschung von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, es ist $S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ und $\varkappa = 2$.

3. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{l} = \mathfrak{m}$. Dann können ohne Aenderung von $\mathfrak{f}$ sowohl $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, als auch unabhängig davon $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ vertauscht werden. Die Substitutionen S ergeben sich aus der unter 1. und einer analogen. Es wird $\varkappa = 4$.

4. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$; dann ist $\varkappa = 6$, analog sind die Fälle $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ etc.

5. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k} = \mathfrak{l} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Dann ist $\varkappa = 24$.

Ist jedoch S eine nicht unter jenen 23 Substitutionen enthaltene, und kann doch durch sie $\mathfrak{f}$ in sich selbst, also in eine ebenfalls reducirte Form übergehen, so können nicht alle Zahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ von Null verschieden sein, sind also mehr als die 24 Formen reducirt. Es sei λ die Anzahl der-

jenigen unter ihnen, deren Coefficienten mit denen von $\mathfrak{f}$ völlig, d. h. auch der Reihenfolge nach übereinstimmen. Ist nun

6. $\mathfrak{g}$ allein gleich Null, sodass noch weitere 24 Formen reducirt sind, deren eine $\mathfrak{f}'$ durch die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ aus $\mathfrak{f}$ hervorgeht und an Stelle der gleichartigen Coefficienten $\begin{Bmatrix} 0, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ die $\begin{Bmatrix} 0, & \mathfrak{n}, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{h} \end{Bmatrix}$ hat, so ist $\lambda = \varkappa$, wenn $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{m}$ verschieden ist, dagegen $\lambda = 2\varkappa$, wenn $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{k} = \mathfrak{m}$ ist, also $\varkappa$ Formen der ersten 24 mit $\varkappa$ Formen der zweiten 24 übereinstimmen. Von den Symmetrieen zwischen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ sind durch die Bedingung, dass $\mathfrak{g}$ allein $= 0$ sein soll, die zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}$ ausgeschlossen. Dagegen kann $\mathfrak{f}$ ungeändert bleiben bei der Vertauschung von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ oder der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$, oder beiden Vertauschungen in nothwendiger oder willkürlicher Verbindung, wenn nämlich bezüglich $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, oder $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{m}$, oder $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$, oder $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ ist. Es kann demnach $\varkappa$ ausser dem Werthe 1 auch die Werthe 2 und 4 annehmen. Ist

7. $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} = 0$, so dass $3 \cdot 24$ Formen reducirt sind, von welchen drei, zu denen $\mathfrak{f}$ selbst gehört, durch die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ cyklisch in einander übergehen, wodurch die Coefficienten $\begin{Bmatrix} 0, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \\ 0, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ sich in $\begin{Bmatrix} 0, & \mathfrak{k}, & \mathfrak{m} \\ 0, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} 0, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{h} \\ 0, & \mathfrak{k}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ verwandeln, so ist $\lambda = 1, 2, 4, 6$ oder 24, je nachdem unter den Zahlen $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ keine gleichen, oder ein Paar gleicher, oder zwei Paare gleicher, oder drei gleiche vorkommen, oder alle vier einander gleich sind. Ist

8. $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$, so sind $6 \cdot 24$ Formen reducirt. Von diesen gehen sechs, zu denen $\mathfrak{f}$ selbst gehört, durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, die ich mit S bezeichne, cyklisch aus einander hervor. Die gleichartigen Coefficienten $\begin{Bmatrix} \mathfrak{g}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ bleiben bei Anwendung der Substitution $S^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

ungeändert, verwandeln sich durch S und S^{-2} in $\begin{Bmatrix} \mathfrak{n}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{g}, & \mathfrak{m} \end{Bmatrix}$, durch S^2 und S^{-1} in $\begin{Bmatrix} \mathfrak{m}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{n}, & \mathfrak{g} \end{Bmatrix}$. Es ist also $\lambda = 2$, wenn keine weitere Bedingung erfüllt ist, $\lambda = 4$, wenn nur $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, oder nur $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}$, oder nur $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ ist, $\lambda = 12$, wenn $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ ist. Endlich sind

9. noch die Fälle zu beachten, in welchen drei der Zahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gleich Null sind. Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$. Dann sind 4-mal 4-mal 24 Formen reducirt. Zu den ersten $4 \cdot 24$ gehören die Form $\mathfrak{f}$ und die durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ aus ihr hervorgehenden, deren Coefficienten numerisch vollständig übereinstimmen. Zu den zweiten $4 \cdot 24$ gehören die vier aus der Form $\mathfrak{f}$ und den drei anderen eben angeführten durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ hervorgehenden Formen, welche ebenfalls numerisch vollständig mit einander übereinstimmen. Dasselbe gilt von den dritten und vierten $4 \cdot 24$, wenn man in der letzteren Substitution die Horizontalreihen cyklisch vertauscht. Für alle diese $4 \cdot 4 \cdot 24$ Formen ist $\lambda = 4$, 8 oder 24, je nachdem $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sämmtlich verschieden oder zwei derselben oder alle drei einander gleich sind. Da in den letzteren $3 \cdot 4 \cdot 24$ Formen von den an Stelle von $\begin{Bmatrix} \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ tretenden Coefficienten zwei in einer Verticalreihe stehende und ein anderer gleich Null werden, während die drei übrigen die willkürlichen Werthe $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ annehmen, so sind auch diese Fälle und somit alle überhaupt bei positiven Formen möglichen solchen Ausnahmefälle erledigt.

Die in Vorstehendem gegen die Darstellung von *Eisenstein* gewonnene Vereinfachung ist der grösseren Naturgemässheit meiner Reductionsbedingungen zu danken.

c) Geometrische Beziehungen.

Bezeichnet man eine geradlinige Strecke im Raume, deren Projectionen auf drei rechtwinklige Axen ξ, ξ_1, ξ_2 sind, ihrer Grösse und Lage nach symbolisch mit $(\mathfrak{a})$, analog Strecken, deren Projectionen auf dieselben Axen

η, η_1, η_2 und ζ, ζ_1, ζ_2 sind, mit $(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c})$, so stellt der Inbegriff der Endpunkte der von ein und demselben Anfangspunkte ausgehenden symbolisch mit $x(\mathfrak{a})+y(\mathfrak{b})+z(\mathfrak{c})$ zu bezeichnenden Strecken, worin x, y, z alle ganzen Zahlen bedeuten, ein System parallelepipedisch geordneter Punkte dar. Versteht man unter dem Product zweier solcher Strecken das Product ihrer absoluten Längen mal dem Cosinus ihres Richtungsunterschiedes, eine Symbolik, welche schon im *Gauss*ischen Nachlass (Werke Bd. II. S. 305) gebraucht wird, und sich auch durch die *Hamilton*schen Quaternionen ausdrücken lässt, so wird das Quadrat der Strecke $x(\mathfrak{a})+y(\mathfrak{b})+z(\mathfrak{c})$, also das Quadrat ihrer Länge gleich $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}\\ \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k}\end{pmatrix}(x, y, z)$, wenn man die Quadrate der Strecken $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, die Producte je zweier dieser Strecken mit $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ bezeichnet. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus den Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} \xi^2+\xi_1^2+\xi_2^2=\mathfrak{a},\ \eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2=\mathfrak{b},\ \zeta^2+\zeta_1^2+\zeta_2^2=\mathfrak{c},\\ \eta\zeta+\eta_1\zeta_1+\eta_2\zeta_2=\mathfrak{g},\ \zeta\xi+\zeta_1\xi_1+\zeta_2\xi_2=\mathfrak{h},\ \xi\eta+\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=\mathfrak{k},\end{cases}$$

welche auch ohne Symbolik dasselbe Resultat ergeben. Da, wie ebenso zu beweisen ist, wenn $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}\\ \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k}\end{pmatrix}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ mit $\mathfrak{a}'$ bezeichnet wird,

$$(\alpha(\mathfrak{a})+\alpha_1(\mathfrak{b})+\alpha_2(\mathfrak{c}))(\beta(\mathfrak{a})+\beta_1(\mathfrak{b})+\beta_2(\mathfrak{c}))=\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha}\cdot\frac{\beta}{2}+\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_1}\cdot\frac{\beta_1}{2}+\frac{d\mathfrak{a}'}{d\alpha_2}\cdot\frac{\beta_2}{2}\text{ etc.}$$

ist, so erkennt man, dass, wenn die Form $\mathfrak{f}$ durch die Substitution $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$, deren Determinante wie immer $=1$ angenommen wird, in $\mathfrak{f}'$ übergeht, die Coefficienten von $\mathfrak{f}'$ dieselben Beziehungen zu dem Punktsysteme haben, wie die von $\mathfrak{f}$, wenn man sich die Punkte desselben nur durch andere Linien verbunden denkt. Aus der Gleichung $I = \begin{vmatrix}\mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h}\\ \mathfrak{k} & \mathfrak{b} & \mathfrak{g}\\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\end{vmatrix}^2$ folgt, dass die sechsfachen Volumina der drei durch die aufeinander folgenden Kanten $(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{c})(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})$ bestimmten Tetraeder $=\pm\sqrt{I}$, der drei durch die auf einander folgenden Kanten $(\mathfrak{a})(\mathfrak{c})(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})(\mathfrak{b})(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})(\mathfrak{a})(\mathfrak{c})$ bestimmten Tetraeder $=\mp\sqrt{I}$ sind. Ich setze immer $\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\end{vmatrix}=+\sqrt{I}$.

Die ersten Unterdeterminanten dieser Determinante bezeichne ich mit Ξ, Ξ_1, Ξ_2, H, H_1, H_2, Z, Z_1, Z_2, sodass $\xi_0\,\Xi_0 + \eta_0\,H_0 + \zeta_0\,Z_0 = \sqrt{I}$, $\begin{vmatrix} \Xi & H & Z \\ \Xi_1 & H_1 & Z_1 \\ \Xi_2 & H_2 & Z_2 \end{vmatrix} = I$ ist. Bezeichnet man symbolisch mit $(\mathfrak{A})$ ein seinem Flächeninhalt und der Lage der Ebene nach bestimmtes Ebenenstück, dessen auf die drei Axen senkrechte Projectionen Ξ, Ξ_1, Ξ_2 sind, und das Analoge mit $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, versteht man ferner unter dem Product zweier solcher Ebenenstücke das Product ihrer Flächeninhalte mal dem Cosinus ihres Richtungsunterschiedes, so wird

$$(\mathfrak{A})\cdot(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A},\ (\mathfrak{B})\cdot(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B},\ (\mathfrak{C})\cdot(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C},\ (\mathfrak{B})\cdot(\mathfrak{C}) = \mathfrak{G},\ (\mathfrak{C})\cdot(\mathfrak{A}) = \mathfrak{H},\ (\mathfrak{A})\cdot(\mathfrak{B}) = \mathfrak{K},$$

wie die Gleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} \Xi^2 + \Xi_1^2 + \Xi_2^2 = \mathfrak{A},\ H^2 + H_1^2 + H_2^2 = \mathfrak{B},\ Z^2 + Z_1^2 + Z_2^2 = \mathfrak{C}, \\ HZ + H_1 Z_1 + H_2 Z_2 = \mathfrak{G},\ Z\Xi + Z_1 \Xi_1 + Z_2 \Xi_2 = \mathfrak{H}, \\ \Xi H + \Xi_1 H_1 + \Xi_2 H_2 = \mathfrak{K} \end{cases}$$

ergeben, welche auch zeigen, dass $\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{K} & \mathfrak{H} \\ \mathfrak{K} & \mathfrak{B} & \mathfrak{G} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{G} & \mathfrak{C} \end{vmatrix} = I^2$ ist.

Mit der Substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ wird

$$\xi'_0 = \alpha\,\xi_0 + \alpha_1\,\eta_0 + \alpha_2\,\zeta_0,\quad \eta'_0 = \beta\,\xi_0 + \beta_1\,\eta_0 + \beta_2\,\zeta_0,\quad \zeta'_0 = \gamma\,\xi_0 + \gamma_1\,\eta_0 + \gamma_2\,\zeta_0,$$

oder zusammengefasst

$$(\mathfrak{a}') = \alpha\,(\mathfrak{a}) + \alpha_1\,(\mathfrak{b}) + \alpha_2\,(\mathfrak{c}),\ (\mathfrak{b}') = \beta\,(\mathfrak{a}) + \beta_1\,(\mathfrak{b}) + \beta_2\,(\mathfrak{c}),$$
$$(\mathfrak{c}') = \gamma\,(\mathfrak{a}) + \gamma_1\,(\mathfrak{b}) + \gamma_2\,(\mathfrak{c}).$$

Setzt man die Ausdrücke für ξ'_0, η'_0, ζ'_0 in die Gleichung $\xi'_0\,\Xi'_0 + \eta'_0\,H'_0 + \zeta'_0\,Z'_0 = \sqrt{I}$ ein, so ergiebt die Betrachtung der mit ξ_0, η_0, ζ_0 multiplicirten Ausdrücke die Gleichungen

$$\Xi_0 = \alpha\,\Xi'_0 + \beta\,H'_0 + \gamma\,Z'_0,\ H_0 = \alpha_1\,\Xi'_0 + \beta_1\,H'_0 + \gamma_1\,Z'_0,$$
$$Z_0 = \alpha_2\,\Xi'_0 + \beta_2\,H'_0 + \gamma_2\,Z'_0,$$

oder zusammengefasst

$$(\mathfrak{A}) = \alpha\,(\mathfrak{A}') + \beta\,(\mathfrak{B}') + \gamma\,(\mathfrak{C}'),\ (\mathfrak{B}) = \alpha_1\,(\mathfrak{A}') + \beta_1\,(\mathfrak{B}') + \gamma_1\,(\mathfrak{C}'),$$
$$(\mathfrak{C}) = \alpha_2\,(\mathfrak{A}') + \beta_2\,(\mathfrak{B}') + \gamma_2\,(\mathfrak{C}').$$

Der Richtungsunterschied zweier Ebenen hängt ab von den Umlaufsrichtungen, welche man in den Ebenen als positiv annimmt. Nimmt man dieselben so an, dass die gemeinsame Linie zweier Ebenen, als Grenzlinie geschlossener je nur auf einer Seite derselben gelegener Stücke beider Ebenen betrachtet, in den zweien in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird, so ist der fragliche Winkel der zwischen zwei im Inneren der geschlossenen Stücke liegenden auf der gemeinsamen Linie senkrechten Geraden, von welchen die eine in dieser Linie endigt, die andere in ihr beginnt. Für alle Ebenen eines geschlossenen Polyeders lassen sich die Umlaufsrichtungen so annehmen, dass zwischen je zwei eine gemeinsame Kante besitzenden die angegebene Bedingung erfüllt ist. Nur bei dieser Annahme ist die Summe der Projectionen aller dieser Ebenenstücke auf eine beliebige Ebene gleich Null. So hat das obige $\mathfrak{H}$ das Vorzeichen des Cosinus des Winkels, welchen die durch $(-(\mathfrak{a}), +(\mathfrak{b}))$ vollständig bezeichnete Dreiecksfläche mit der $(-(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{c}))$ bildet, wenn man, wie sonst üblich, die Linien $+(\mathfrak{a})$, $+(\mathfrak{b})$ und $+(\mathfrak{c})$ von demselben Punkte ausgehen lässt. Wenn $\mathfrak{f}$ nach meiner Definition reducirt ist mit der Reihenfolge $\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, wenn also die Richtungsunterschiede je zweier anliegender sowohl als Gegenseiten des unebenen Vierseits $(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{b})$ $(\mathfrak{c})$ $(\mathfrak{d})$ stumpfe oder rechte Winkel sind, und $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{m}$ nicht grösser als $\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{n}$ ist, so sind auch die Richtungsunterschiede je zweier der Tetraederflächen, in welchen die Seiten $(\mathfrak{d})$ und $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{d})$ liegen, stumpfe oder rechte Winkel, weil die Coefficienten $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ der oben betrachteten Form $\mathfrak{F}_1$ negativ oder Null sind. Die Umlaufsrichtungen sind dabei nicht durch $(+(\mathfrak{a}), +(\mathfrak{b}))$, $(+(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{c}))$ etc., sondern nach der obigen Regel bestimmt. Wird z. B. hier, wo immer der Anfangspunkt einer Seite mit dem Endpunkt einer anderen zusammenfällt, die Fläche $(\mathfrak{G})$ bestimmt als $(+(\mathfrak{a}), +(\mathfrak{b}))$, so ist für $(\mathfrak{A})$ zu nehmen $(-(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{b}) + (\mathfrak{c}))$ oder, was dasselbe Resultat giebt, $(-(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{c}))$. Die auf $(\mathfrak{b})$ senkrechte Projection von $(\mathfrak{a})$ hat aber als Projectionen auf die drei Axen $\xi - \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{b}}\eta$, $\xi_1 - \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{b}}\eta_1$, $\xi_2 - \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{b}}\eta_2$, die auf $(\mathfrak{b})$ senkrechte Projection von $(\mathfrak{c})$ die $\zeta - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\eta$, $\zeta_1 - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\eta_1$, $\zeta_2 - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\eta_2$. Der Cosinus des Richtungsunterschiedes beider mal

dem Product ihrer absoluten Längen ist daher $\mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{k}}{\mathfrak{h}}$, derselbe Cosinus mal dem Product der absoluten Werthe der zwei Flächeninhalte $-\mathfrak{H}$.

Dieselbe Eigenschaft wie das Vierseit $(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{b})$ $(\mathfrak{c})$ $(\mathfrak{d})$ hat auch das ihm gleiche und ähnliche aber nicht congruente $(\mathfrak{c})$ $(\mathfrak{b})$ $(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{d})$. Die Formen, welche zweien in dieser Art verwandten Vierseiten entsprechen, gehen durch eine Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ von der Determinante -1 in einander über, welche jedoch durch Vorzeichenänderung aller Coefficienten, also Umkehrung der Richtungen der Strecken, in eine solche von der Determinante $+1$ verwandelt werden kann, sodass in den Formen dieser für die Vierseite selbst wesentliche Unterschied verschwindet. Die den Vierseiten $(\mathfrak{b})$ $(\mathfrak{c})$ $(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{d})$ und $(\mathfrak{c})$ $(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{b})$ $(\mathfrak{d})$ und den ihnen gleichen und ähnlichen aber nicht congruenten $(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{c})$ $(\mathfrak{b})$ $(\mathfrak{d})$ und $(\mathfrak{b})$ $(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{c})$ $(\mathfrak{d})$ entsprechenden Formen sind nicht auch in Rücksicht auf die Reihenfolge der Coefficienten reducirt. Mittels dreier Ebenen, welche durch die Hauptdiagonale $(\mathfrak{d})$ und die nicht auf $(\mathfrak{d})$ liegenden Ecken eines durch die Kanten $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$ bestimmten Parallelepipeds gelegt werden, wird letzteres in die sechs eben besprochenen durch die Permutationen unter $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c})$ aus einander entstehenden Tetraeder getheilt, von welchen also nur zwei gegenüber liegende nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche spitzkantig sein können. Von den sechserlei Dreiecken jedoch, welche auf den Tetraederflächen liegen, kann im Falle der Reduction keines stumpfwinkelig sein, weil dann von den Zahlen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ keine positiv ist, also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht kleiner als $-\mathfrak{k}$ sind etc.

Für die geometrische Bedeutung der Gleichungen (5.) und (6.) will ich noch anführen, dass man die durch $x(\mathfrak{a}) + y(\mathfrak{b}) + z(\mathfrak{c})$ bestimmte Strecke auch als die Strecke $x(\mathfrak{a}) + y(\mathfrak{b}) + z(\mathfrak{c}) + t(\mathfrak{d})$ ansehen kann, wenn man entweder $t = 0$ setzt, oder x, y, z und t um ein und dieselbe Zahl vergrössert oder verkleinert. Denkt man sich die Punkte des Systems in Ebenen geordnet, welche der dem oben benützten Index 3 entsprechenden Tetraederfläche $((\mathfrak{d}), (\mathfrak{a}))$ parallel sind, so bezeichnet das oben benützte u_3 die Anzahl der durch diese Ebenen getrennten Schichten, welche von der Strecke $x(\mathfrak{a}) + y(\mathfrak{b}) + z(\mathfrak{c}) + t(\mathfrak{d})$ durchschnitten werden, als positiv nach der Seite zu gerechnet, auf welcher von der Tetraederfläche $((\mathfrak{d}), (\mathfrak{a}))$ aus

das Tetraeder selbst liegt. Da das Analoge für u_4 gilt und (12) die Entfernung der einzelnen Punkte auf der Schnittlinie der Ebenen 1 und 2 bezeichnet, so erkennt man die Bedeutung des Gliedes (12) $u_3 u_4$ und ebenso der übrigen Glieder der Gleichung (6.). Dieser geometrische Satz steht im *Gauss*ischen Nachlass, Werke Bd. II. S. 307.

Eine wichtige Rolle spielen im Folgenden die besonderen im vorigen Abschnitt unter 7. und 8. betrachteten Fälle. Im letzteren steht (a) auf ($\mathfrak{A}$) senkrecht, im ersteren steht jede Seite des Vierseits auf ihrer Gegenseite senkrecht, hat also das Tetraeder die besondere von *Lagrange* und neuerlich von Hrn. *Borchardt* (Abh. d. Berliner Akad. 1865 u. 1866), Berliner Monatsber. Juni 1872) und Hrn. *Kronecker* (Berliner Monatsber. Juni 1872) behandelte Eigenschaft, das grösste bei gegebenen Inhalten der Seitenflächen mögliche Volumen zu haben. Analog besagt die Bedingung $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_1 = 0$, dass jede Fläche des Tetraeders auf ihrer Gegenfläche senkrecht steht, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche, dass die Kantenwinkel an zwei Gegenkanten rechte sind, und bewirkt analog, dass das Tetraeder das grösste bei gegebenen Längen der vier übrigen Kanten mögliche Volumen hat. Will man die gewöhnliche Gestalt der Formen nicht verlassen, und doch die Symmetrie zwischen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ nicht verletzen, so kann man auf $\mathfrak{f}$ die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ von der Determinante 2 anwenden, welche nach Obigem identisch ist mit der $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$. Die Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ bewirkt also nichts anderes, als die Anwendung der Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ auf die entstehende Form. Diese Umwandlung ist analog der von Hrn. *Borchardt* (Berl. Abh. 1865 S. 7) benützten, welche auf der Anwendung der Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ auf die Form $\mathfrak{f}_1$, also der adjungirten Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ auf die adjungirte

Form $\mathfrak{F}_1$ beruht, und dieselbe Symmetrie herstellt in Bezug auf die oben benützten Ziffern 1, 2, 3, 4. Bei der ersteren Umwandlung sind die Kanten $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$ eines Parallelepipeds durch die Diagonalen $(\mathfrak{b})+(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c})+(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a})+(\mathfrak{b})$ der Seitenflächen, bei der letzteren die Kanten $(\mathfrak{a}_1)$, $(\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{c}_1)$ eines Parallelepipeds, von dessen Hauptdiagonalen eine $(\mathfrak{d}_1)$ ist, durch die drei anderen Hauptdiagonalen desselben ersetzt.

IV. Ternäre indifferente Formen.

a) Beziehungen zu den entsprechenden positiven Formen. Reducirte Formen.

Wie in der Theorie der positiven Formen $\mathfrak{f}$ die der negativen $-\mathfrak{f}$, so ist auch in der Theorie der einen Art der indifferenten Formen f, welche ich allein behandeln will, die der anderen $-f$ enthalten. Die Invariante der Formen f soll nämlich nicht negativ, und vorläufig auch nicht Null sein. Diese Formen f oder $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ g, & h, & k \end{pmatrix}$ lassen sich dann durch eine lineare homogene Substitution von reellen, aber sonst beliebigen Coefficienten in die Form $x^2-y^2-z^2$ verwandeln. Um die Transformation und Reduction dieser Formen auf die positiver Formen zurück zu führen, stelle ich das System der Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} \xi^2-\xi_1^2-\xi_2^2=a, & \eta^2-\eta_1^2-\eta_2^2=b, \quad \zeta^2-\zeta_1^2-\zeta_2^2=c, \\ \eta\zeta-\eta_1\zeta_1-\eta_2\zeta_2=g, & \zeta\xi-\zeta_1\xi_1-\zeta_2\xi_2=h, \quad \xi\eta-\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2=k \end{cases}$$

auf, in welchen $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ stetig veränderlich sein und alle möglichen reellen Werthe annehmen sollen. Bestimmt man durch diese mittels der Gleichungen (7.) sechs veränderliche Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ und betrachtet eine Form $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \end{pmatrix}$ oder $\mathfrak{f}$, welche diese Grössen als Coefficienten hat, so wird diese Form $\mathfrak{f}$ oder $(\xi x+\eta y+\zeta z)^2+(\xi_1 x+\eta_1 y+\zeta_1 z)^2+(\xi_2 x+\eta_2 y+\zeta_2 z)^2$ für alle zulässigen Werthe ihrer veränderlichen Coefficienten eine positive, ich nenne sie *die der Form f entsprechende positive Form.* Die Gleichungen (9.) ziehen nach sich die Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} \Xi^2-\Xi_1^2-\Xi_2^2=\mathrm{A}, \quad H^2-H_1^2-H_2^2=\mathrm{B}, \quad Z^2-Z_1^2-Z_2^2=\mathrm{C}, \\ HZ-H_1Z_1-H_2Z_2=\mathrm{G}, \quad Z\Xi-Z_1\Xi_1-Z_2\Xi_2=\mathrm{H}, \\ \Xi H-\Xi_1H_1-\Xi_2H_2=\mathrm{K}, \end{cases}$$

in welchen A, B, C, G, H, K die Coefficienten der zu f adjungirten Form F bezeichnen. Denn die Gleichungen (9.), (10.) gehen aus denen (7.), (8.), welche ich auch zusammengefasst durch

$$(7a.)\quad \begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{k}, & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{k}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h}, & \mathfrak{g}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}$$

$$(8a.)\quad \begin{vmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{K}, & \mathfrak{H} \\ \mathfrak{K}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{G} \\ \mathfrak{H}, & \mathfrak{G}, & \mathfrak{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Xi & \Xi_1 & \Xi_2 \\ H & H_1 & H_2 \\ Z & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Xi & H & Z \\ \Xi_1 & H_1 & Z_1 \\ \Xi_2 & H_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

ausdrücke, hervor, indem man den Grössen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \Xi_1, H_1, Z_1, \Xi_2, H_2, Z_2$ je in beiden auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Systemen den Factor $\sqrt{-1}$, oder je in einem derselben den -1 beifügt, und es ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichungen (10.) daraus, dass bei dieser Umwandlung, abgesehen von der hier gleichgültigen Vorzeichenänderung von Ξ, H, Z die zwei Systeme auf der rechten Seite der Gleichung (8a.) die adjungirten der entsprechenden von (7a.) bleiben, also auch das links in (8a.) entstehende System das adjungirte zu dem links in (7a.) entstehenden $\begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix}$ bleibt. Zugleich erkennt man, dass die Invariante der Formen f und $\mathfrak{f}$ dieselbe ist, ich bezeichne sie mit I. Fügt man in einer der aus (8a.) entstehenden Relationen beiderseits in der eben gebrauchten Bedeutung noch das System $\begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix}$ bei, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{K} & \mathrm{H} \\ \mathrm{K} & \mathrm{B} & \mathrm{G} \\ \mathrm{H} & \mathrm{G} & \mathrm{C} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Xi & -\Xi_1 & -\Xi_2 \\ H & -H_1 & -H_2 \\ Z & -Z_1 & -Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Xi & H & Z \\ \Xi_1 & H_1 & Z_1 \\ \Xi_2 & H_2 & Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Xi & -\Xi_1 & -\Xi_2 \\ H & -H_1 & -H_2 \\ Z & -Z_1 & -Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{I} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{I} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{I} \end{vmatrix}.$$

Von den neun hierin liegenden Gleichungen besagen drei, dass $\sqrt{I}\cdot\Xi$ $\sqrt{I}\cdot H$, $\sqrt{I}\cdot Z$ die halben Derivirten von $F(\xi,\eta,\zeta)$ nach ξ,η,ζ sind. Die Gleichung $\xi\Xi+\eta H+\zeta Z=\sqrt{I}$ geht demnach über in

$$(11.)\quad F(\xi,\eta,\zeta)=I.$$

Da sich ebenso $\sqrt{I}\cdot\xi$, $\sqrt{I}\cdot\eta$, $\sqrt{I}\cdot\zeta$ als die halben Derivirten von $f(\Xi,H,Z)$ nach Ξ, H, Z ergeben, ist auch

$$(12.)\quad f(\Xi,H,Z)=I.$$

Die unmittelbaren Beziehungen zwischen den Coefficienten von f, $\mathfrak{f}$, F, $\mathfrak{F}$ ergeben sich aus (11.) oder (12.) und den Gleichungen

$$(13.)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}=2\xi^2-a, & \mathfrak{b}=2\eta^2-b, \quad \mathfrak{c}=2\zeta^2-c, \\ \mathfrak{g}=2\eta\zeta-g, & \mathfrak{h}=2\zeta\xi-h, \quad \mathfrak{k}=2\xi\eta-k \end{cases}$$

oder

$$(14.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}=2\Xi^2-\mathrm{A}, & \mathfrak{B}=2H^2-\mathrm{B}, \quad \mathfrak{C}=2Z^2-\mathrm{C}, \\ \mathfrak{G}=2HZ-\mathrm{G}, & \mathfrak{H}=2Z\Xi-\mathrm{H}, \quad \mathfrak{K}=2\Xi H-\mathrm{K}. \end{cases}$$

Es werden nämlich die simultanen Invarianten

$$(15.)\quad \mathrm{A}\mathfrak{a}+\mathrm{B}\mathfrak{b}+\mathrm{C}\mathfrak{c}+2\mathrm{G}\mathfrak{g}+2\mathrm{H}\mathfrak{h}+2\mathrm{K}\mathfrak{k}=-I$$
$$(16.)\quad a\mathfrak{A}+b\mathfrak{B}+c\mathfrak{C}+2g\mathfrak{G}+2h\mathfrak{H}+2k\mathfrak{K}=-I,$$

wie sich auch aus dem Verschwinden der Invarianten der Formen $\mathfrak{f}+f$ und $\mathfrak{f}-f$ unmittelbar ergiebt. Von der ersteren, der Determinante $8\Sigma\pm\xi^2\eta_1^2\zeta_2^2$ verschwinden auch alle ersten Unterdeterminanten. Hiernach kann man aus (15.) noch drei der Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ eliminiren. Man erhält z. B. mittels

$$(a+\mathfrak{a})(b+\mathfrak{b})=(k+\mathfrak{k})^2,\ (a+\mathfrak{a})(g+\mathfrak{g})=(k+\mathfrak{k})(h+\mathfrak{h}),$$
$$(a+\mathfrak{a})(c+\mathfrak{c})=(h+\mathfrak{h})^2$$

als identisch mit (15.), solange nicht $\mathfrak{a}$ Null oder unendlich ist,

$$(17.)\quad F(\mathfrak{a},\mathfrak{k},\mathfrak{h})=\mathfrak{a}I.$$

Ebenso erhält man

$$(18.)\quad f(\mathfrak{A},\mathfrak{K},\mathfrak{H})=\mathrm{A}I.$$

Gehen f und $\mathfrak{f}$ durch die Substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ in f' und $\mathfrak{f}'$ über, so ist auch $\mathfrak{f}'$ eine der Form f' entsprechende positive Form, wie schon aus

den angegebenen Invarianteneigenschaften folgt. Die vermittelnden Grössen ξ' etc. sind die schon oben angegebenen, welche auch zusammengefasst durch

$$\begin{vmatrix} \xi' & \xi'_1 & \xi'_2 \\ \eta' & \eta'_1 & \eta'_2 \\ \zeta' & \zeta'_1 & \zeta'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'_1 & \eta'_1 & \zeta'_1 \\ \xi'_2 & \eta'_2 & \zeta'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt werden können. Die Vereinigung beider Ausdrücke giebt

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}' & \mathfrak{k}' & \mathfrak{h}' \\ \mathfrak{k}' & \mathfrak{b}' & \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{h}' & \mathfrak{g}' & \mathfrak{c}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

und, wenn man die oben angegebenen Aenderungen an $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$, welche die gleichen an $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, \xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2$ nach sich ziehen, vornimmt,

$$\begin{vmatrix} a' & k' & h' \\ k' & b' & g' \\ h' & g' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Das System der Endpunkte der von demselben Anfangspunkte ausgehenden Strecken $x(\mathfrak{a}) + y(\mathfrak{b}) + z(\mathfrak{c})$ ist jetzt veränderlich, und zwar so, dass jeder Punkt desselben auf einem ihm eigenen gleichseitigen Rotationshyperboloid sich bewegen kann, dessen Mittelpunkt der eben genannte Anfangspunkt, dessen Rotationsaxe die Axe der ξ, η, ζ ist. Da in den Gleichungen (7.) nur Verbindungen der Grössen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ vorkommen, welche bei Drehung des Systems um diese Axe unverändert bleiben, so könnte man eine dieser Grössen, etwa ζ_2, constant $= 0$ setzen und, wenn etwa $a > 0$ ist, ξ_1, ξ_2 als willkürliche Variable ansehen, zu deren sämmtlichen reellen Werthen dann zwei reelle, den Gleichungen (9.) genügende Werthsysteme der übrigen Variablen gehören. Von diesen zwei Werthsystemen, welche dieselben Werthe von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ ergeben, soll nur das eine dem oberen Vorzeichen in der Gleichung $\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = \pm \sqrt{I}$ entsprechende zugelassen werden, so dass jeder Punkt auf eine der beiden Schalen seines Hyperboloids angewiesen bleibt, wenn dasselbe ein zweischaliges ist. Auch von den zwei getrennten der Gleichung (11.) genügenden Werthsystemen ξ, η, ζ wird dann nur eines zugelassen. Wollte man ein neues

geometrisches Bild einführen, so könnte man ξ, η, ζ als Coordinaten eines auf einer Schale eines zweischaligen Hyperboloids beweglichen Punktes ansehen.

Ich führe nun auch bei den ternären quadratischen Formen die Reduction der indifferenten auf die der positiven zurück. Ich nenne nämlich *vorbehaltlich noch beizufügender Beschränkungen eine indifferente Form reducirt, wenn für irgend ein zulässiges Werthensystem der besprochenen Variablen die entsprechende positive Form* nach meiner Definition *reducirt ist.* Man erhält für jede Klasse eine reducirte Form, wenn man zu einer beliebigen Form f derselben mittels eines beliebigen zulässigen Werthensystems jener Variablen die entsprechende $\mathfrak{f}$ bildet, und eine Substitution, welche geeignet ist $\mathfrak{f}$ in eine reducirte zu verwandeln, auf f anwendet. Man erhält alle reducirten Formen dieser Klasse, wenn man dasselbe für alle zulässigen Werthensysteme ausführt, wobei also nach dem ersten Bild bei $\zeta_2 = 0$ der Punkt ξ, ξ_1, ξ_2, alle Lagen auf der einen Schale des Hyperboloids $\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = a$, oder nach dem zweiten Bild der Punkt ξ, η, ζ alle Lagen auf der einen Schale des Hyperboloids $F(\xi, \eta, \zeta) = I$ annimmt.

b) Eckpunkte der Felder der reducirten Formen. Axen der Symmetrie.

Diese Schalen zerfallen in Felder von der Art, dass für alle Punkte eines Feldes dieselbe Form $\mathfrak{f}'$ reducirt ist, während an den Grenzen veränderliche Coefficienten $\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{k}', \mathfrak{l}', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$ dieser Form gleich Null sind. Da es nur auf die Art des Zusammenhanges dieser Felder ankommt, welche unverändert bleibt, wenn anstatt f irgend eine äquivalente Form zu Grunde gelegt wird, so kann man auch jeweilig andere äquivalente Formen, am einfachsten diejenigen zu Grunde legen, deren entsprechende positive Formen selbst reducirt sind und die ich auch selbst mit f bezeichne. Ich schliesse jedoch den Fall, dass eine der Zahlen a, b, c, d, A, B, C oder D $= F(1,1,1)$ gleich Null würde, vorläufig aus. Zur Erkennung der Felder braucht man nun bloss ihre Grenzlinien und zur Erkennung der Grenzlinien nur die Endpunkte, nämlich die Durchschnittspunkte je zweier derselben, zu betrachten, denn von einer in sich zurücklaufenden Linie kann kein Feld begrenzt sein, da, wenn diese z. B. die Linie $\mathfrak{k} = 0$ wäre, an zwei Punkten derselben $\frac{dF(\xi, \eta, \zeta)}{d\zeta}$ oder Z verschwinden müsste. Es müsste also $C < 0$ sein, und ginge die Gleichung (11.) in die (4.) über,

[illegible] Die zu betrach-
[illegible] Arten, je
[illegible] System $\left\{\begin{matrix} g & h & f \\ l & m & n \end{matrix}\right\}$
[illegible] $= n = 0$ z. B. stos-
[illegible] drei Felder von der
[illegible] die entsprechen-
[illegible] Als Grenzlinien
[illegible] $= n = 0$ die Linien $h = 0$,
[illegible] nur auf einer Seite des
[illegible] solchen Punkt eine
[illegible] Die Bedingung,
[illegible] ist, drückt sich über-
[illegible] einer Form f, aus welcher f'
[illegible] hervorgeht, $g = h = f$, also

$$[illegible] - C\frac{(f-g)(f+h)}{f+k} + 2G(f+g)$$

$$[illegible] = 2I$$

[illegible] negativ und nicht grösser als a, b oder c
[illegible] $b-f$, $c-f$, oder

$$[illegible] - g. \frac{(h-k)(h-g)}{f-k} + k + g - b - h,$$

$$[illegible] - k.$$

[illegible] $A\lambda + B\mu + C\nu + Df = -I$ und λ, μ, ν, f nicht
[illegible] Auflösung dieser Gleichung vierten Grades
[illegible] nothwendig, und selbst die Frage nach der Existenz
[illegible] Wurzeln innerhalb gewisser Grenzen erledigt sich, so weit nöthig,
[illegible] Betrachtungen. In dem Punkte $h = f = 0$
[illegible] Felder zusammen, deren reducirte Formen ent-
[illegible] Betrachteten durch die Substitution

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ cyklisch aus einander hervorgehen und in derselben cyklischen Reihenfolge von einander getrennt sind durch die Linien $\mathfrak{h}=0$, $\mathfrak{h}+\mathfrak{k}=0$, $\mathfrak{k}=0$ und ihre rückwärts gehenden Verlängerungen. Ich nenne solche Punkte *Kreuzungspunkte*. Die Gleichung (17.) mit $\mathfrak{h}=\mathfrak{k}=0$ ergiebt

$$(19.)\quad \mathfrak{a}=\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I},\quad \mathfrak{b}=\frac{k^2}{a+\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}}-b=\frac{-\mathrm{C}-b\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}}{a+\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}},$$

$$\mathfrak{c}=\frac{h^2}{a+\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}}-c=\frac{-\mathrm{B}-c\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}}{a+\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}},\quad \mathfrak{g}=\frac{hk}{a+\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}}-g=\frac{\mathrm{G}-g\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}}{a+\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}I}},$$

woraus, wie auch mittels $\mathfrak{H}=\mathfrak{K}=0$ aus der Gleichung (18.), auch

$$\mathfrak{A}=\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{a}I},\ \mathfrak{B}=\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{A}+\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{a}I}}-\mathrm{B}=\frac{-cI-\mathrm{B}\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{a}I}}{\mathrm{A}+\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{a}I}}\ \text{etc.}$$

werden. Damit diese Werthe reell sind, ist nur nöthig, dass a und A dieselben Vorzeichen haben, und, wenn dieses das negative ist, so ist, damit auch ξ, η, ζ reell werden, ausserdem noch nöthig, dass $a\mathrm{A}\leqq I$ ist, eine Bedingung, welche bei positivem A von selbst erfüllt ist, wie aus

$$I=a\mathrm{A}+k\mathrm{K}+h\mathrm{H}=a\mathrm{A}-(bh^2-2ghk+ck^2),$$

worin die in der Klammer stehende binäre quadratische Form dann eine negative ist, hervorgeht. Eine wirkliche Berechnung der Wurzel ist auch hier niemals nöthig, sondern nur bisweilen eine Prüfung, ob sie gewisse Grenzen erreicht oder nicht. Die Form $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, & 0, & 0\end{pmatrix}$ ist nun, wie leicht ersichtlich, entweder selbst reducirt, oder geht durch eine Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ in eine reducirte über, je nachdem die binäre Form $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ selbst reducirt ist, oder durch eine Substitution $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ in eine reducirte übergeht. An die Stelle von $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ treten im Falle der Reduction in den übrigen ter-

nären Formen, welche für die in dem Kreuzungspunkt zusammenstossenden Felder reducirt sind, die durch cyklische Vertauschung der drei äusseren Coefficienten und die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ aus ($\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$) hervorgehenden binären Formen. Durch jedes System ganzer Coefficienten α, α_1, α_2, λ, μ, ν, welche den Bedingungen

$$1 = \alpha\lambda + \alpha_1\mu + \alpha_2\nu \text{ und } 0 < f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)\cdot F(\lambda, \mu, \nu) \leqq I$$

genügen, ist ein und nur ein Kreuzungspunkt bestimmt. Auf die Aufsuchung aller Kreuzungspunkte lässt sich nun die Frage nach der Aneinanderfügung der Felder zurückführen. Es ist zwar möglich, dass ein Feld keinen solchen Punkt, sondern nur Spaltungspunkte auf seinen Grenzen hat, ob aber je ein Stück, oder je zwei Stücke zweier Linien wie $\mathfrak{h} = 0$ und $\mathfrak{m} = 0$ die Begrenzung dieses Feldes bilden, immer wird für die benachbarten Felder nur die Linie $\mathfrak{h} - \mathfrak{m} = 0$ von Wichtigkeit sein. Diese Felder verhalten sich dann ebenso, als wenn die bezüglichen Zweige der Linie $\mathfrak{h} - \mathfrak{m} = 0$ durch die Linien $\mathfrak{h} = 0$ und $\mathfrak{m} = 0$ nicht unterbrochen worden wären.

Besonders sind noch die Ausnahmefälle zu betrachten, in welchen dem oben in III. b) unter 9. Behandelten entsprechend, mehrere der betrachteten Punkte zusammenfallen. Es sei in einem Punkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$, und sei der Symmetrie wegen in keinem der sechs durch die Linien $\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{k} = 0$ getrennten Flächenstücke das Vorzeichen von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ dasselbe, was nöthigenfalls durch Anwendung einer der Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ herbeigeführt werden kann. Man denke sich dann eine der drei Linien $\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$ oder $\mathfrak{k} = 0$ unendlich wenig so verschoben, dass ein unendlich kleines Dreieck entsteht, innerhalb dessen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ negativ, $\mathfrak{f}$ reducirt ist. Die drei Eckpunkte dieses Dreieckes sind dann Kreuzungspunkte. Von den je sechs Feldern, welche um dieselben herumliegen, gehört das Dreieck selbst allen drei Punkten, gehören die an den Dreiecksseiten anliegenden je zwei Punkten an. Die zwei Linien $\mathfrak{g} + \mathfrak{h} = 0$ und $\mathfrak{g} + \mathfrak{k} = 0$, welche das an der Dreiecksseite $\mathfrak{g} = 0$ anliegende Flächen-

stück begrenzen, in welchem die durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ aus $\mathfrak{f}$ hervorgehende Form reducirt ist, treffen sich in einem Spaltungspunkt, und haben dort als gemeinsame Fortsetzung die Linie $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$. Auch dieses Feld wird unendlich klein. Da für $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ dasselbe wie für $\mathfrak{g}$ gilt, so erkennt man, dass, wenn man die Punkte wieder zusammen fallen lässt, und die in einen Punkt degenerirenden Felder nicht berücksichtigt, um den Punkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ herum neun Felder liegen, welche von einander getrennt werden durch die je nach beiden Seiten des Punktes gehenden Linien $\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{k} = 0$ und die Linien $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ je auf der Seite des Punktes, auf welcher bezüglich $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ negativ sind. Auf den Punkt selbst beschränken sich auch die Felder der drei noch übrigen von den 16 wesentlich verschiedenen für den Punkt reducirten Formen, welche durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ aus f hervorgehen.

Fallen zwei der Grenzlinien in eine zusammen, z. B., wenn $g = h = 0$ ist, die $\mathfrak{g} = 0$ und $\mathfrak{h} = 0$ in die $\zeta = 0$, so wird die der Form f vorgeschriebene Bedingung auch von der numerisch mit ihr übereinstimmenden aus ihr durch die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ hervorgehenden Form erfüllt, es degeneriren von den neun sonst endlichen Feldern vier in die Linie $\zeta = 0$, mit welcher auch die Linien $\mathfrak{g} + \mathfrak{h} = 0$ und $\mathfrak{g} - \mathfrak{h} = 0$ zusammenfallen. Es bleiben auf der positiven Seite der Linie $\mathfrak{k} = 0$ die Felder der zwei numerisch mit einander übereinstimmenden durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ aus f hervorgehenden Formen, auf der negativen Seite zunächst beiderseits die Felder der zwei numerisch mit einander übereinstimmenden durch die Substitution $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ aus f hervorgehenden Formen. Je die andere durch den

Punkt gehende Grenzlinie dieser beiden Felder ist $\pm\mathfrak{h}-\mathfrak{f}=0$ oder $\mp\mathfrak{g}-\mathfrak{f}=0$, je nachdem der absolute Werth von η grösser oder kleiner ist als der von ξ. Die numerisch mit einander übereinstimmenden Formen der beiderseits folgenden und bis zur Linie $\zeta=0$ reichenden Felder gehen also aus f entweder durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \mp 1 & 0 & \mp 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ oder durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \mp 1 & 0 & \pm 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ hervor. Je nur das eine dieser beiden Felder wäre im allgemeineren Falle endlich, das andere in den Punkt degenerirt gewesen. Auf diesen Punkt beschränkt bleiben die Felder der zwei durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \mp 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ aus f hervorgehenden Formen, die der acht übrigen Formen degeneriren in die Linie $\zeta=0$, und zwar vier, deren Formen hier genannt worden sind, auf der negativen, vier auf der positiven Seite der Linie $\mathfrak{f}=0$. Letzteres lässt sich auch daraus erkennen, dass jeder Punkt der Linie $\zeta=0$ die Eigenschaften eines Kreuzungspunktes hat, wobei die drei sich kreuzenden Linien in eine zusammenfallen, also vier der sechs Felder in diese Linie degeneriren und die Formen der zwei anliegenden Felder durch die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ in einander übergeführt werden können.

Da die Formen der zunächst auf beiden Seiten der Linie $\zeta=0$ gelegenen Felder numerisch mit einander übereinstimmen, und durch die Form eines Feldes die Formen aller benachbarten Felder eindeutig bestimmt sind, so bildet diese Linie gewissermassen eine Axe der Symmetrie, auf deren beiden Seiten auch in weiterer Entfernung die Eintheilung in Felder die gleiche ist, sodass man, um alle Felder zu erkennen, diese Linie nicht zu überschreiten braucht. Von dieser Art sind in der Fig. 1, Taf. III, welche die Eintheilung in Felder für eine Klasse ganzzahliger Formen von der Invariante 60 darstellt, vier von den sechs äusseren Grenzlinien. Es sind daselbst nur diejenigen Formen, deren Felder eine endliche Ausdehnung haben, und zwar ins Innere derselben eingeschrieben. Die an den Grenzlinien stehenden Buchstaben

bezeichnen diejenigen veränderlichen Grössen, welche an denselben gleich Null werden, wobei die Bezeichnung immer in Bezug auf die Form gewählt ist, in deren Feld der Buchstabe steht. Bei jeder dieser Formen ist, um im Einzelnen alle Willkür auszuschliessen, die Reihenfolge der Coefficienten a, b, c, d so gewählt, dass sie eine abnehmende Reihe bilden und auch von den Coefficienten g, h, k, l, m, n je der erste noch nicht bestimmte möglichst gross wird. Bei den im Text angegebenen Substitutionen dagegen, bei welchen den verschiedenen Grenzlinien eines Feldes entsprechend verschiedene Reihenfolgen der a, b, c, d wünschenswerth wären, ist angenommen, dass diese Reihenfolgen erst beiderseits, wenn nöthig, geändert worden sind.

Kommt zu den letztbetrachteten Bedingungen $g = h = 0$ noch die $k = 0$, und ist η der Null werdende Factor von $\mathfrak{k}$, sodass einer der zwei Aeste der Linie $\mathfrak{g} = 0$ mit $\mathfrak{h} = 0$, der andere mit $\mathfrak{k} = 0$ zusammenfällt, so werden die der Form f vorgeschriebenen Bedingungen von vier numerisch mit einander übereinstimmenden Formen erfüllt, welche auseinander durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ hervorgehen, und deren Felder in Systeme je zweier Linien degeneriren, nämlich je eines Stückes der Linie $\zeta = 0$ und eines Stückes der Linie $\eta = 0$. Endliche Ausdehnung erhalten nur die vier zwischen den je zwei ebengenannten Linienstücken enthaltenen Felder, deren im Wesentlichen numerisch mit einander übereinstimmende Formen aus den vier soeben besprochenen durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ hervorgehen. Von solcher Art sind drei der äusseren Ecken meiner Fig. 1.

Wird dagegen, ohne dass $k = 0$ ist, im Falle $g = h = 0$ die Linie $\zeta = 0$ von der Linie $\eta = 0$, dem anderen Aste der Linie $\mathfrak{g} = 0$ geschnitten, so gehen die Formen zweier durch die Linie $\zeta = 0$ getrennter Felder durch die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ in die zweier anderer über, welche bis dahin in diese Linie degenerirt waren. Solche Punkte liegen auf der rechten und am unteren Ende der linken Grenzlinie der Fig. 1.

Durch die oben unter III. b) besprochenen Substitutionen gehen nicht

nur reducirte positive, sondern beliebige ternäre quadratische Formen in sich selbst über, wenn sie die angegebenen Bedingungen erfüllen, und es können auch von indifferenten Formen alle diese Bedingungen erfüllt werden ausser denjenigen, welche für $\varkappa$ oder λ den Werth 24 geben. Sind die dort unter 1. bis 4. angegebenen Bedingungen bei reducirten indifferenten Formen erfüllt, so findet in den Grenzlinien ihrer Felder eine $\varkappa$-theilige Symmetrie statt und in Folge dessen auch in der ganzen Anordnung der zunächst und weiterhin benachbarten Felder. Zu dem Falle 1. $a = b$, $g = h$, $l = m$ gehören in der Fig. 1 die Formen $\left|\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & -3 & 2 \\ & -1 & -3 & 2 \\ & & -2 & 8 \\ & & & -12 \end{array}\right|$ und $\left|\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & -2 & 1 \\ & -1 & -2 & 1 \\ & & -12 & 16 \\ & & & -18 \end{array}\right|$. Die Axe der zweitheiligen Symmetrie ist durch die punktirte Linie angedeutet. Zu dem Falle 2. $a = b$, $c = d$, $g = l$, $h = m$ gehört die Form $\left|\begin{array}{rrrr} -1 & -2 & -1 & 4 \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & -9 & 6 \\ & & & -9 \end{array}\right|$ der Fig. 1. Sind die unter 6. bis 9. angegebenen Bedingungen bei reducirten indifferenten Formen erfüllt, so können auch bestimmte Grenzlinien selbst als Axen der Symmetrie auftreten. Zu dem Falle 6. gehört die Form $\left|\begin{array}{rrrr} 3 & -5 & -1 & 3 \\ & -1 & 3 & 3 \\ & & -2 & 0 \\ & & & -6 \end{array}\right|$ der Fig. 1, in welcher $n = 0$, $m = l$, also nach Analogie des Falles $g = 0$, $h = n$ die Zahl $\lambda = 2\varkappa = 2$ ist, und die Form
$\left|\begin{array}{rrrr} 3 & -7 & 1 & 3 \\ & 3 & 1 & 3 \\ & & -2 & 0 \\ & & & -6 \end{array}\right|$, in welcher $n = 0$, $m = l$, $g = h$, also nach Analogie des Falles $g = 0$, $h = n$, $k = m$ die Zahl $\lambda = 2\varkappa = 4$ ist, ferner die Formen
$\left|\begin{array}{rrrr} -1 & -3 & 3 & 1 \\ & -2 & 0 & 5 \\ & & -6 & 3 \\ & & & -9 \end{array}\right|$ und $\left|\begin{array}{rrrr} 3 & 1 & -3 & -1 \\ & -2 & 0 & 1 \\ & & -6 & 9 \\ & & & -9 \end{array}\right|$, für welche $\lambda = 2\varkappa = 2$ ist. Zu

dem Falle 7. gehören die Formen $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ & 3 & 1 & 0 \\ & & -9 & 8 \\ & & & -9 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ & -2 & 0 & 1 \\ & & -4 & 8 \\ & & & -9 \end{vmatrix}$, für welche beide $\lambda = 2$ ist, die erste stimmt nach geeigneter Aenderung der Reihenfolge der a, b, c, d mit sich selbst überein, die zweite mit einer dritten, deren Feld mit denen der beiden ersten einen Spaltungspunkt gemein hat. Die Fälle 8. $g = h = 0$, zu welchen für $\lambda = 4$ die Form $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ & -1 & -1 & 0 \\ & & -18 & 20 \\ & & & -20 \end{vmatrix}$ gehört, und 9. $g = h = k = 0$ wurden schon oben besprochen.

Hiermit sind die Fälle erschöpft, in welchen zwei numerisch mit einander übereinstimmende Formen demselben Feld oder zwei längs einer Linie aneinander grenzenden Feldern angehören können.

c) Auffindung der Felder.

Um von einem Kreuzungspunkte $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ aus die übrigen desselben Feldes zu finden, sehe man zunächst zu, ob die Kreuzungspunkte $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} = 0$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} = 0$ vorkommen, was erfordert, dass bezüglich a und $cd - n^2$, c und $ab - k^2$, c und $ad - l^2$ dieselben Vorzeichen und, wenn sie negativ sind, ein die Invariante nicht überschreitendes Product haben, und dass die nach (19.) zu bildenden binären Formen $(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{l}, \mathfrak{b})$ bezüglich reducirt sind. Von den wirklich vorkommenden Kreuzungspunkten kann mit $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ auf demselben Aste der Linie $\mathfrak{h} = 0$ höchstens einer liegen, als welchen ich nur den Punkt $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} = 0$ betrachten will, da im Vorliegenden bei den beiden anderen dasselbe gelten würde. Denn die zwei Linien $\mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{g} = 0$ können nach (19.) nicht mehr als einen reellen Durchschnittspunkt haben, und, wenn der zu betrachtende Ast der Linie $\mathfrak{h} = 0$ bei einem solchen Punkt in Theile der Hyperboloidsschale eingetreten ist, in welchen $\mathfrak{g} > 0$ ist, könnte er nur durch einen zweiten wieder in Theile eintreten, in welchen $\mathfrak{g} < 0$ ist. Alle auf einem Aste der Linie $\mathfrak{h} = 0$ gelegenen Punkte unterscheiden sich von den auf dem anderen gelegenen im Falle, dass eine Schale des Hyperboloids (11.) von zwei Schalen des

Hyperboloids $2\xi\zeta = h$ geschnitten wird, wenn nämlich B positiv, also a und c negativ sind, durch die Vorzeichen von ξ und ζ, im Falle, dass eine Schale des Hyperboloids (11.) zwar nur von einer Schale des Hyperboloids $2\xi\zeta = h$, aber in zwei Aesten geschnitten wird, wenn nämlich B, a und c negativ sind, durch die Vorzeichen von H. Bei verschiedenen Vorzeichen von a und c hat die Linie $\mathfrak{h} = 0$ überhaupt nur einen Ast, sind beide positiv, so kann diese Linie, wie aus (17.) ersichtlich, gar nicht vorkommen. Erfüllt der Punkt $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} = 0$ in Vergleich mit dem $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ die angegebenen Bedingungen, so ist er als der auf diesen folgende Kreuzungspunkt zu betrachten, und ist die Linie $\mathfrak{g} = 0$ ebenso zu untersuchen, wie bisher und im Folgenden die Linie $\mathfrak{h} = 0$. Ob nämlich die Linie $\mathfrak{h} = 0$ zwischen den zwei betrachteten Kreuzungspunkten von der Linie $\mathfrak{m} = 0$ geschnitten wird, zwei oder vier mal, kann ganz unbeachtet bleiben. Denn die Linie $\mathfrak{m} = 0$ kann von keiner der übrigen Linien $\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{k} = 0$, $\mathfrak{l} = 0$ oder $\mathfrak{n} = 0$ mehr als einmal geschnitten werden. Ein Ast derselben, welcher das Feld von f an Punkten der Linie $\mathfrak{h} = 0$ betritt und verlässt, an welchen also $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{n}$ negativ sind, kann demnach zwischen den zwei Schnittpunkten von keiner jener vier Linien geschnitten werden, wird also allein oder zusammen mit dem andern Ast aus dem angenommenen Felde von f nur ein Stück ausschneiden, welches keine Kreuzungspunkte auf seiner Grenze enthält, also unbeachtet bleiben kann. Treten durch das erstbetrachtete Stück der Linie $\mathfrak{h} = 0$ zwei Aeste der Linie $\mathfrak{m} = 0$ ein, welche auch andere Grenzlinien schneiden, so kann man die Durchschnittspunkte der zwei Aeste bis zur Berührung an einander geschoben, dann die auf je einer Seite der Linie $\mathfrak{h} = 0$ gelegenen Stücke mit einander verbunden und von der Linie $\mathfrak{h} = 0$ abgelöst denken, wodurch ebenfalls an der Lagerung der Felder nichts Wesentliches geändert wird, nur die zwei getrennten Felder vereinigt werden, das zusammenhängende sie trennende Feld aber selbst in zwei Theile getrennt wird.

Liegt aber mit dem Punkte $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ auf demselben Aste der Linie $\mathfrak{h} = 0$ kein Kreuzungspunkt, für welchen $\mathfrak{f}$ reducirt ist, so endigt diese Linie in einem Spaltungspunkt, wobei es wieder gleichgültig ist, ob sie von der Linie $\mathfrak{m} = 0$ ein oder drei mal geschnitten wird. Die Fortsetzung der Grenze des Feldes von f wird also ein Ast der Linie $\mathfrak{m} = 0$. Trägt derselbe keinen Kreuzungspunkt, so vereinigt er nur zwei Aeste der Linie

$\mathfrak{h} = 0$, welche man dann behandeln kann, als wenn sie in unmittelbarem Zusammenhange ständen. Trägt derselbe aber einen Kreuzungspunkt, so ist von diesem wie vom Punkte $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ aus zu verfahren. Eine Schwierigkeit tritt nur dann auf, wenn es zwei Aeste der Linie $\mathfrak{h} = 0$ und zwei der Linie $\mathfrak{m} = 0$ giebt, deren jeder einen und nur einen Kreuzungspunkt trägt, indem dann fraglich ist, wie die letzteren sich mit den ersteren paaren. Die Entscheidung könnte man erlangen aus der Betrachtung der schon oben angegebenen zwischen den zwei Aesten der Linie $\mathfrak{h} = 0$ verlaufenden Linien $\xi = 0$ und $\zeta = 0$ oder $H = 0$ und ihren Durchschnittspunkten mit der Linie $\mathfrak{m} = 0$, von welchen, wenn sie reell sind, zu entscheiden wäre, auf welchen Aesten der Linie $\mathfrak{m} = 0$ sie liegen. Je nachdem in einem solchen Punkte $\mathfrak{f}$ reducirt ist oder nicht, liegt er zwischen dem Kreuzungspunkte und Spaltungspunkte des bezüglichen Astes der Linie $\mathfrak{m} = 0$ oder nicht. Da jedoch auf die Form f immer dieselbe Substitution angewendet werden muss, um die Form f' des durch die Linie $\mathfrak{h} = 0$ von ihrem Felde getrennten Feldes zu erhalten, so hat die Form f', wenn Stücke zweier Aeste der Linie $\mathfrak{h} = 0$ Theile der Grenze sind, zwei getrennte Felder. Denkt man sich die zwei fraglichen Spaltungspunkte einander bis zur Berührung genähert, die zwei Zweige der Linie $\mathfrak{h} = 0$ mit einander, die zwei der Linie $\mathfrak{m} = 0$ mit einander verbunden und dann die erstere von der letzteren losgelöst, so sind dadurch die zwei getrennten Felder der Form f' vereinigt, das Feld der Form f aber in zwei getrennt, während sich für die übrigen Grenzlinien nichts ändert. Man kann also, so oft genau zwei Kreuzungspunkte auf $\mathfrak{h} = 0$ vorhanden sind, einfach verfahren, als wenn sie demselben Aste dieser Linie angehörten. Wenn alle vorhandenen und wie die besprochenen aufzufindenden Kreuzungspunkte des Feldes oder der Felder einer Form erschöpft sind, so muss von selbst sich die letzte an die erste Grenzlinie wieder anschliessen.

Anstatt zu den Feldern alle Grenzlinien, kann man auch zu den Grenzlinien alle anliegenden Felder bestimmen. Offenbar beginnt und endigt bei dem besprochenen Verfahren jede Grenzlinie in einem Spaltungspunkt und geht durch einen oder mehrere Kreuzungspunkte hindurch. Durch unendlich viele Kreuzungspunkte ins Unendliche kann eine Linie $\mathfrak{h} = 0$ nur gehen, wenn h und eine der Zahlen g, k, l, n gleich Null ist.

Anstatt auf die Reduction der Formen $\mathfrak{f}$ hätte sich auch auf die der Formen $\mathfrak{F}$ die Eintheilung der Hyperboloidsschale in Felder gründen lassen. Die Kreuzungspunkte beider Eintheilungen fallen zusammen, an anderen Punkten können sich die beiderlei Grenzlinien nicht schneiden. Theile jedes Feldes des einen Systems können den Feldern dreier Formen des andern Systems angehören. Ist die Eintheilung des einen Systems gefunden, so ergiebt sich die des andern von selbst, indem die von einem Kreuzungspunkte ausgehenden sechs Grenzlinien des einen je zwischen zwei der sechs des anderen liegen. Einige der Grenzlinien des zweiten, das adjungirte zu nennenden Systems sind zu einem später zu besprechenden Zwecke, wegen dessen auch einige der gewöhnlichen Linien stärker aufgetragen sind, als geschlängelte Linien in die Figur 1 eingezeichnet.

Wie sich bei den binären Formen diejenigen, durch welche die Null rational darstellbar ist, deren Invariante also bei rationalen Coefficienten eine negative Quadratzahl ist, von den übrigen dadurch unterscheiden, dass bei den ersteren auf dem Hyperbelaste die Intervalle gewisser Formen ins Unendliche reichen, bei den letzteren nicht, so unterscheiden sich die ternären Formen, durch welche die Null rational darstellbar ist, für deren Criterien ich auf Disquisitiones arithmeticae art. 299 verweise, von den übrigen dadurch, dass bei den ersteren die Felder gewisser Formen ins Unendliche reichen, bei den letzteren nicht. Da bei letzteren keine der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ unendlich klein werden kann, so darf natürlich bei Erhaltung der Reductionsbedingungen auch keine unendlich gross werden. Dass es nur eine endliche Anzahl reducirter, ganzzahliger Formen von einer gegebenen Invariante, um so mehr also nur eine endliche Anzahl von einer Klasse geben kann, folgt aus der Endlichkeit der Anzahl ganzzahliger Werthsysteme der a, b, c, g, h, k, für welche die nach (19.) oder mittels $\xi = 0$ gebildete Form $\mathfrak{f}$ reducirt ist. Diese Endlichkeit ergiebt sich für a und A aus $0 < a\mathrm{A} \leqq l$, dann, wenn b und c negativ sind, für b, c, g, h, k aus den Reductionsbedingungen für $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$, wenn b und c verschiedene Vorzeichen haben, für b, c, g aus $\mathrm{A} = bc - g^2$, für h und k aus den Reductionsbedingungen für $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$. Sind b und c positiv, so sind B und C negativ, also B, C, G, H, K und folglich auch b, c, g, h, k begrenzt.

Wenn man also die geschilderte Entwicklung der Felder hinreichend

weit fortsetzt, so kann man, während die Anzahl derselben noch endlich ist, immer dahin gelangen, dass jedes neu hinzukommende Feld nur eine Wiederholung eines schon vorhandenen, also die ganze weitere Entwicklung immer eine unendlich ofte Wiederholung der schon durchgeführten ist. Auch Axen der Symmetrie wie die oben geschilderten braucht man bei der ersten Entwicklung nicht zu überschreiten. Jede solche Axe ist offenbar nach ihren beiden Richtungen unbegrenzt, da aus der an einer Stelle stattfindenden Symmetrie ihrer zwei Seiten von selbst die Fortsetzung dieser Symmetrie folgt. Bei dem in der schon erwähnten Fig. 1 durchgeführten Beispiel sind alle Grenzen des entwickelten Systems von Feldern solche Axen der Symmetrie. An ihren Durchschnittspunkten findet bei diesem Beispiele vierfache Symmetrie statt, was durch die gewählten rechten Winkel angedeutet werden soll.

Durch das Bisherige ist bereits die Möglichkeit gezeigt, für jede gegebene Form die in der Einleitung gestellten Aufgaben zu lösen, indem natürlich jedem Felde, dessen Form mit f numerisch übereinstimmt, eine Substitution von f in sich selbst entspricht, welche durch die einzelnen Substitutionen gefunden werden kann, durch welche die Form je eines Feldes in die eines benachbarten übergeht. Es bleibt noch übrig, die sehr beträchtlichen Vereinfachungen zu besprechen, welche durch Zusammenfassen der Felder, in deren Formen a oder A dasselbe ist, analog dem Zusammenfassen der Intervalle zu Strecken bei den binären Formen entstehen, und allgemeine Eigenschaften der Resultate hervorzuheben.

d) Zusammenfassung der Kreuzungspunkte in Gebiete. Unmittelbare Entwicklung dieser Gebiete.

Wenn bei irgend einem zulässigen Werthensystem ξ, η, ζ der Kreuzungspunkt $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ vorkommen, also die gerade Linie $(\mathfrak{a})$ auf der Ebene $(\mathfrak{A})$ senkrecht stehen kann, so lässt sich die Gesammtheit der geraden Linien, welche auf die Ebene $(\mathfrak{A})$ senkrecht zu stehen kommen können, durch $(\mathfrak{f}\,(1, \alpha_1, \alpha_2))$ oder $(\mathfrak{a}) + \alpha_1\,(\mathfrak{b}) + \alpha_2\,(\mathfrak{c})$ ausdrücken, wenn α_1, α_2 diejenigen ganzen Zahlen bezeichnen, mittels deren $f\,(1, \alpha_1, \alpha_2)$ das Vorzeichen von A erhält, und nicht, wie bei negativem Werthe von A möglich wäre, mit A ein die Invariante I überschreitendes Product giebt. Lässt man vom An-

fangspunkte der Linie (a) die sämmtlichen auch ihrer Länge nach als Functionen von ξ, η, ζ bestimmten Linien $(\mathfrak{a}) + \alpha_1 (\mathfrak{b}) + \alpha_2 (\mathfrak{c})$, also vom Endpunkte der Linie (a) die Linien $\alpha_1 (\mathfrak{b}) + \alpha_2 (\mathfrak{c})$ ausgehen, so liegen die Endpunkte dieser sämmtlichen Linien in einer Ebene $(\mathfrak{A})$ und, wenn $A > 0$ ist, im Innern einer bestimmten Ellipse, wenn $A < 0$ ist, zwischen einer bestimmten Hyperbel und ihren Asymptoten, wie die bezüglichen Bedingungen $1 \gtrless f(1, \alpha_1, \alpha_2)$ oder

$$1 - \frac{I}{A} \gtrless (b, g, c)\left(\alpha_1 - \frac{K}{A}, \alpha_2 - \frac{H}{A}\right)$$

und

$$-1 \lesseqgtr f(1, \alpha_1, \alpha_2) \geqq \frac{I}{A}$$

oder

$$\frac{I}{-A} - 1 \lesseqgtr (b, g, c)\left(\alpha_1 - \frac{K}{A}, \alpha_2 - \frac{H}{A}\right) \geqq 0$$

zeigen. Diejenigen Formen, durch welche die Null dargestellt werden kann, schliesse ich auch hier vorläufig aus. Das besondere Werthensystem der Variablen ξ, η, ζ, bei welchem eine Linie $(\mathfrak{f}(1, \alpha_1, \alpha_2))$ auf $(\mathfrak{A})$ senkrecht steht, also die Lage des bezüglichen Kreuzungspunktes auf der Hyperboloidsschale $F(\xi, \eta, \zeta) = I$, ist, wie die Anwendung der Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ oder ihrer adjungirten zeigt, bestimmt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{g}\alpha_1 + \mathfrak{c}\alpha_2 = \mathfrak{k} + \mathfrak{b}\alpha_1 + \mathfrak{g}\alpha_2 = 0 \text{ oder } \mathfrak{K} - \mathfrak{A}\alpha_1 = \mathfrak{H} - \mathfrak{A}\alpha_2 = 0.$$

Die Elimination von α_1 und α_2 aus den angegebenen Bedingungen ergiebt, wenn $A > 0$ ist, $\mathfrak{A}^2 \gtrless f(\mathfrak{A}, \mathfrak{K}, \mathfrak{H})$, oder mittels der Gleichung (18.) $\mathfrak{A}^2 \gtrless A I$, also $2\Xi^2 \gtrless A + \sqrt{AI}$, wenn aber $A < 0$ ist, $\mathfrak{A}^2 \gtrless -AI \leqq \frac{I}{-A}\mathfrak{A}^2$, also $A + \sqrt{-AI} \lesseqgtr 2\Xi^2 \geqq 0$. Die sämmtlichen solchen Kreuzungspunkte liegen also im ersten Falle auf einem durch eine Ebene abgeschnittenen von einer Ellipse begrenzten endlichen, im zweiten Falle auf einem zwischen zwei Ebenen enthaltenen von zwei Hyperbelästen begrenzten unendlichen Stück der Hyperboloidsschale. Ihre Anzahl ist im ersten Falle offenbar endlich, im zweiten aber unendlich gross in der Art, dass eine endliche Anzahl von Zahlwerthen $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$ sich für unendlich viele Werthsysteme α_1, α_2 wiederholt. Unendlich viele Wiederholungen des Werthes a selbst, aus deren

jeder sich auch eine Wiederholung der übrigen Werthe ergiebt, erhält man nämlich dadurch, dass man auf f zunächst Substitutionen $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ von der Determinante 1 anwendet, durch welche (b, g, c) in sich selbst übergeht, und dann Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}$, durch welche, wenn unabhängig von dem obigen Zeichen $\pm$ die Zahl $\varepsilon = \pm 1$ ist, εh und εk an die Stellen von h und k, also auch εH und εK an die Stellen von H und K treten. Ist s der grösste gemeinsame Divisor von b, g, c, und $s\sigma$ der von $b, 2g, c$, ist $t^2 + \frac{A}{s^2} \cdot u^2 = \pm \sigma^2$ und sind

$$\beta_1 = \frac{t}{\sigma} - \frac{gu}{s\sigma}, \quad \gamma_1 = \frac{-cu}{s\sigma}, \quad \beta_2 = \frac{bu}{s\sigma}, \quad \gamma_2 = \frac{t}{\sigma} + \frac{gu}{s\sigma},$$

so wird aus den Gleichungen

$$\varepsilon K = -H\gamma_1 + K\gamma_2 - A\beta; \quad \varepsilon H = H\beta_1 - K\beta_2 - A\gamma,$$

welche die Anwendung der adjungirten Substitution $\pm \begin{vmatrix} 1 & -\beta & -\gamma \\ 0 & \gamma_2 & -\beta_2 \\ 0 & -\gamma_1 & \beta_1 \end{vmatrix}$ auf F ergiebt,

$$A\beta = K\left(\frac{t}{\sigma} - \varepsilon\right) - \frac{Ahu}{s\sigma}; \quad A\gamma = H\left(\frac{t}{\sigma} - \varepsilon\right) + \frac{Aku}{s\sigma}.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind, wenn $s = 1$ ist und das obere Vorzeichen benützt wird, also $(t - \sigma)(t + \sigma) \equiv 0$ (mod. A) ist, für einen der beiden Werthe von ε durch A immer theilbar, wenn dasselbe Primzahl oder Potenz einer ungeraden Primzahl ist, aber auch ausserdem und bei Benützung beider Vorzeichen immer dann, wenn $\frac{t}{\sigma} + \frac{u\sqrt{-A}}{s\sigma}$ das Quadrat eines ähnlichen Ausdruckes ist. Bei grösseren Werthen von s hängt es von den Werthen von h und k ab, die wie vielte Potenz eines ähnlichen Ausdruckes $\frac{t}{\sigma} + \frac{u\sqrt{-A}}{s\sigma}$ sein muss, damit diese Theilbarkeit ebenfalls stattfindet. Jedenfalls reichen hierzu die Quadrate derjenigen Potenzen hin, welche $= T + U\sqrt{-A}$ sind, wenn $T^2 + AU^2 = \pm 1$ ist.

Für die besprochenen *Kreuzungspunkte* gebrauche ich nun, wenn ihre Anzahl grösser als eins und $A_1 = F(\lambda, \mu, \nu)$ der specielle Werth von A ist, den Ausdruck: sie *liegen im Gebiete von* $A = A_1$, *oder* $A = F(\lambda, \mu, \nu)$. *Den*

Punkt $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{k}_1 = 0$ *selbst, welchem also eine auf* ($\mathfrak{A}$) *senkrechte Stellung von* $(\mathfrak{a}_1) = (\mathfrak{f}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2))$ *entspricht, bezeichne ich als den Punkt* $\frac{a_1}{A_1}$, *worin auch nöthigenfalls* a_1 *und* A_1 *durch* $f'(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ *und* $F(\lambda, \mu, \nu)$ *zu ersetzen sind.* Wie die Punkte $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$ den in der Ebene ($\mathfrak{A}$) gelegenen Endpunkten der von demselben Anfangspunkte ausgehenden Geraden $\alpha_1(\mathfrak{b}) + \alpha_2(\mathfrak{c})$ entsprechen, so entsprechen den diese Punkte verbindenden geraden Linien ($\mathfrak{b}$), ($\mathfrak{c}$), allgemein $p(\mathfrak{b}) + q(\mathfrak{c})$ oder $((\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})(p, q))$, für welche bezüglich α_2 constant, α_1 constant, allgemein $p\alpha_2 - q\alpha_1$ constant ist, auf der Hyperboloidsschale die die Punkte $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$ verbindenden Linien, auf welchen bezüglich $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}, \frac{p\mathfrak{H} - q\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}$ constant, oder, durch die Coefficienten geeigneter Formen $\mathfrak{F}'$ ausgedrückt, $\mathfrak{H}', \mathfrak{K}', p\mathfrak{H}' - q\mathfrak{K}'$ gleich Null sind, welche Linien ebenfalls einander nur je in einem Punkte oder gar nicht schneiden, wie die entsprechenden Geraden. Liegt im Falle $A > 0$ auf einer Seite einer solchen Linie keiner der Punkte $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$ mehr, während sie selbst durch zwei oder mehr derselben hindurchgeht, so nenne ich sie einen ***Rand des Gebietes*** von A, die zwei äussersten dieser auf ihr gelegenen Punkte ***Ecken des Gebietes***, die auf keinem Rande gelegenen solchen Punkte bezeichne ich als *im Inneren des Gebietes gelegen.* Von den früher betrachteten Grenzlinien von Feldern, in welchen verschiedene Formen $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}' \cdots$ reducirt sind, kommen diejenigen, längs welcher ($\mathfrak{A}$) auf einer anderen Ebene senkrecht ist und welche in mindestens zwei Punkten von anderen eben solchen Linien geschnitten werden, unter den eben betrachteten Linien $\frac{p\mathfrak{H} - q\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}$ = const. vor. Diese aber, insbesondere auch die Ränder der Gebiete positiver Coefficienten A, kommen nicht nothwendig unter jenen Grenzlinien vor, von welchen nur je drei durch die zu betrachtenden Kreuzungspunkte hindurch gehen, und welche, wenn überhaupt vorhanden, auch in Spaltungspunkten endigen können, ehe sie diese Kreuzungspunkte erreichen. In dem Beispiel der Fig. 1 fallen ausser einem alle Ränder der Gebiete positiver Coefficienten A mit Grenzlinien der genannten Art zusammen und sind als geschlängelte Linien eingezeichnet. Nur die Grenzlinie, mit welcher der von

dem, wenn $\begin{pmatrix}2, & -1, & -9\\ 1, & -5, & -1\end{pmatrix} = f$ ist, mit $\frac{f(1,0,0)}{F(1,0,0)}$ zu bezeichnenden Punkte $\frac{2}{8}$ nach dem $\frac{2}{8}$ führende Rand des Gebietes von $A = 8 = F(1, 0, 0)$ zusammenfallen müsste, geht zwar von dem ersten Punkte aus, erreicht aber nicht den andern, ich habe desshalb eine vorhandene Grenzlinie, welche den Punkt $\frac{2}{8}$ mit dem nächsten auf dem folgenden Rande gelegenen Punkte $\frac{2}{8}$ verbindet, eingezeichnet, da es mir nur auf irgend eine Bezeichnung der Zusammengehörigkeit der Punkte ankam, welche Gebieten positiver Coefficienten A angehören, und ich keine den beiderlei Feldertheilungen fremden Linien mehr einführen wollte. Berücksichtigt man, dass in der Figur 1 die sechs äussersten Grenzlinien Axen zweitheiliger, die sechs Durchschnittspunkte derselben Mittelpunkte viertheiliger Symmetrie sind, und denkt sich hiernach die Figur erweitert, so übersieht man die sämmtlichen Ränder aller vorkommenden Gebiete positiver Coefficienten A, nämlich, abgesehen von den sich auf Linien beschränkenden und dem schon erwähnten, der Gebiete von $A = 12$, $A = 8 = \begin{pmatrix}8, & -12, & -15\\ 0, & 0, & 12\end{pmatrix}(1, 0, 0)$ und $A = 5$.

Zu allem hier für A und a, F und f Besprochenen gilt das völlig Analoge bezüglich für a und A, f und F. Ich gründe darauf auch die analoge Bezeichnung *eines Gebiets von* $a = a_1$ *oder* $a = f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$. Dasselbe umfasst auf der Hyperboloidsschale die Kreuzungspunkte $\frac{a_1}{F_1(1, \mu, \nu)}$ für alle möglichen Werthe von μ, ν, nämlich die Werthe von der Art, dass auf die Ebene $(\mathfrak{F}_1(1, \mu, \nu))$ die Gerade $(\mathfrak{a}_1)$ senkrecht zu stehen kommen kann, oder dass $1 \gtreqless a_1 F_1(1, \mu, \nu) \leqq I$ ist. Im Falle $a > 0$ liegen diese Punkte, für welche auch hier der angegebene Ausdruck nur gebraucht werden soll, wenn ihre Anzahl grösser als eins ist, innerhalb der Ellipse $2\xi^2 = a + \sqrt{aI}$ und ist ihre Anzahl endlich, im Falle $a < 0$ liegen sie zwischen zwei Hyperbelästen $\xi = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{-aI}}{2}}$, und ist ihre Anzahl unendlich.

Auf den Verbindungslinien der einzelnen Punkte ist $\frac{r\mathfrak{h} - s\mathfrak{k}}{\mathfrak{a}}$ constant, $r\mathfrak{h}' - s\mathfrak{k}' = 0$. Diese Linien, insbesondere die Ränder der Gebiete positiver Coefficienten a, fallen möglicher aber nicht nothwendiger Weise zusammen mit den Grenzlinien der Felder, in welchen verschiedene Formen $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}', \cdots$

reducirt sind. In Figur 1 fallen ausser zweien alle diese Ränder mit solchen Grenzlinien zusammen, und sind von den anderen Grenzlinien durch stärkeres Auftragen unterschieden worden. Bei dem Gebiete von $a = 2$ aber fällt zwar ein Stück des Randes, welcher das Eck $\frac{2}{8} = \dfrac{2}{\begin{pmatrix} 8, & -40, & -3 \\ 0, & -6, & -20 \end{pmatrix}(1,0,0)}$ mit dem auf der links oben anzufügenden Ergänzung gelegenen Ecke

$$\frac{2}{8} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 8, & -40, & -3 \\ 0, & -6, & -20 \end{pmatrix}(1,-1,0)}$$

verbindet, mit den Grenzlinien $\mathfrak{h} = 0$ der Felder der in der Zeichnung und in der erwähnten Ergänzung vorkommenden Formen $\begin{pmatrix} 2, & -1, & -12 \\ 2, & -4, & -1 \end{pmatrix}$ zusammen, aber diese Linie endigt beiderseits in Spaltungspunkten, ehe sie die genannten Ecken erreicht. Ich habe desshalb analog wie bei dem oben besprochenen Ausnahmefalle lieber die in Bezug auf die benützte Form $\begin{pmatrix} 2, & -1, & -12 \\ 2, & -4, & -1 \end{pmatrix}$ mit $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}} = -1$ zu bezeichnende und mit einer Grenzlinie zusammenfallende Verbindungslinie der auf den beiderseits folgenden Rändern gelegenen Punkte

$$\frac{2}{17} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 8, & -40, & -3 \\ 0, & -6, & -20 \end{pmatrix}(1,0,-1)} \text{ und } \frac{2}{17} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 8, & -40, & -3 \\ 0, & -6, & -20 \end{pmatrix}(1,-1,-1)}$$

durch stärkeres Auftragen angegeben. Bei dem Gebiete von $a = 3 = \begin{pmatrix} 3, & -4, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}(1,0,0)$ fällt der die Punkte $\frac{3}{8}$ und $\frac{3}{8}$ verbindende Rand $\frac{\mathfrak{h}+\mathfrak{f}}{\mathfrak{a}} = -1$ mit keiner Grenzlinie zusammen, ich habe dafür eine andere diese Punkte verbindende Grenzlinie stärker aufgetragen. Ausser den sich auf Linien beschränkenden und den schon erwähnten kommt noch ein Gebiet eines positiven Coefficienten a in der Fig. 1 vor, nämlich des von $a = 3 = \begin{pmatrix} 3, & -1, & -6 \\ 1, & -3, & -2 \end{pmatrix}(1, 0, 0)$.

Anstatt mittels der Eintheilung der ganzen Hyperboloidsschale in die vielen kleinen Felder suche ich jetzt unmittelbar die Existenz und gegenseitige Lage der wenigeren Gebiete positiver Coefficienten A und a auf.

Da die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ zu der $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ adjungirt ist, so sind $F(-\alpha_1, 1, 0) < 0$, $F(-\alpha_2, 0, 1) < 0$, wenn $f(1, \alpha_1, \alpha_2) > 0$ ist; also ist, wenn $\mathrm{A} > 0$ ist, auch $F(1, \mp 1, 0) < 0$ für das obere oder untere oder für beide Vorzeichen, je nachdem es einen positiven oder einen negativen oder einen positiven und einen negativen ganzen Werth von α_1 giebt, welcher mit irgend einem, wenn auch gebrochenen, Werthe von α_2 verbunden $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$ positiv macht, und ist ebenso $F(1, 0, \mp 1) < 0$, je nachdem es einen positiven oder einen negativen, oder einen positiven und einen negativen Werth von α_2 giebt, welcher mit irgend einem, wenn auch gebrochenen, Werthe von α_1 verbunden $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$ positiv macht.

Liegt der Punkt $\frac{a}{\mathrm{A}}$ im Innern des Gebietes von A, so findet je der dritte dieser zwei mal drei Fälle statt, sind also für alle Vorzeichen $F(1, \mp 1, 0)$ und $F(1, 0, \mp 1)$ negativ, und da dasselbe dann für jede äquivalente Form F_1 gilt, welche durch irgend eine Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}$ aus F hervorgeht, so kann es dann keine von Null verschiedenen relativ primen, also überhaupt keine ganzen Zahlen μ, ν geben, welche $F(1, \mu, \nu)$ positiv machen. *Wenn* also *der Punkt* $\frac{a}{\mathrm{A}}$ *im Innern eines Gebietes von* A *liegt, so gehört er keinem Gebiete von a an,* und ebenso findet man, dass, *wenn er im Innern eines Gebietes von a liegt, er keinem Gebiete von* A *angehört.*

Liegt dagegen der Punkt $\frac{a}{\mathrm{A}}$ an einem Rande des Gebietes von A, so giebt es Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, mittels deren f in eine solche äquivalente Form f_1 übergeht, dass es, während für wenigstens eines der beiden Vorzeichen neben a_1 auch $f_1(1, \pm 1, 0)$ positiv ist, keinen von Null verschiedenen positiven, oder keinen von Null verschiedenen negativen ganzen Werth von α_2 giebt, welcher mit irgend einem ganzen Werth von α_1 verbunden $f_1(1, \alpha_1, \alpha_2)$ positiv macht. Ich mache zunächst noch eine engere Voraussetzung, dass es nämlich keinen von Null verschiedenen positiven, oder

keinen von Null verschiedenen negativen ganzen Werth von α_2 giebt, welcher mit irgend einem reellen ganzen oder gebrochenen Werth von α_1 verbunden $f_1(1, \alpha_1, \alpha_2)$ positiv macht, oder, was offenbar dasselbe bedeutet, dass bei einem der beiden Vorzeichen $f_1(1, \alpha_1, \pm 1)$ für keinen reellen ganzen oder gebrochenen Werth von α_1 positiv wird. Ich werde diese *für einen Rand eines Gebietes von* A, und ebenso die analoge *für einen Rand eines Gebietes von a* gemachte Voraussetzung im Folgenden kurz *die Voraussetzung V* nennen. *Aus dieser*, also hier aus dem Mangel einer reellen Wurzel α_1, der Gleichung $f_1(1, \alpha_1, \pm 1) = 0$ *folgt nun* $F_1(1, 0, \mp 1) > 0$ *und umgekehrt*, und das Analoge gilt nach Vertauschung von f und F.

Man erkennt leicht durch Anwendung derselben Betrachtung auf die Punkte $\frac{f_1(1, u, 0)}{\mathrm{A}_1}$, welche, während u eine Reihe von u' auf einander folgenden auch die Null enthaltenden ganzen Werthen annimmt, die sämmtlichen Punkte eines der Gleichung $\mathfrak{H}_1 = 0$ entsprechenden Randes des Gebietes von A_1 darstellen sollen, dass, wenn für diesen Rand die Voraussetzung V erfüllt ist, diese sämmtlichen Punkte auch Gebieten der verschiedenen Coefficienten $f_1(1, u, 0)$ angehören, in welchen auch die Punkte $\frac{f_1(1, u, 0)}{F_1(1, 0, \mp 1)}$ liegen, welche mit den Punkten $\frac{f_1(1, u, 0)}{\mathrm{A}_1}$ bezüglich durch die Linien $\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{b}_1 u = 0$, unter einander aber durch die Linie $\mathfrak{H}_1 \mp \mathfrak{C}_1 = 0$ verbunden sind, und welche offenbar sämmtlich wieder einem neuen Gebiete von $F_1(1, 0, \mp 1)$ angehören. Bleibt $F_1(1, 0, -v) > 0$ für eine Reihe von v' auf einander folgenden auch die Null enthaltenden ganzen Werthen v, so giebt es offenbar $u' \cdot v'$ Punkte $\frac{f_1(1, u, 0)}{F_1(1, 0, -v)}$, deren jeder einem der u' Gebiete der Coefficienten $f_1(1, u, 0)$ und einem der v' Gebiete der Coefficienten $F_1(1, 0, -v)$ angehört.

Aus $f_1(1, \pm 1, 0) > 0$ folgt nicht nur $F_1(1, \mp 1, 0) < 0$, sondern, da der Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\nu \\ \pm 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{vmatrix}$ die $\begin{vmatrix} 1 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & \mp \nu & 1 \end{vmatrix}$ adjungirt ist, auch $F_1(1, \mp 1, \nu) < 0$ für jeden reellen ganzen oder gebrochenen Werth ν. Die Punkte $\frac{a_1}{F_1(1, 0, -v)}$ liegen also auf einem Rande des Gebietes von a_1, oder dieses ganze Gebiet

beschränkt sich auf eine Linie, diesen Rand, je nachdem die Bedingung $f_1(1, \pm 1, 0) > 0$ nur für eines oder für beide Vorzeichen erfüllt ist. Denn wenn $F_1(1, \mp \mu, \nu) > 0$ wäre für irgend einen positiven ganzen Werth μ verbunden mit irgend einem ganzen Werth ν, so müsste auch $F_1(1, \mp 1, \nu) > 0$ sein wenigstens für irgend einen gebrochenen Werth ν. Man erkennt hiernach, dass für die zwei äussersten Werthe von u die Punkte $\frac{f_1(1, u, 0)}{F_1(1, 0, -v)}$ auf je einem Rand von Gebieten der positiven Coefficienten $f_1(1, u, 0)$ liegen, und dass die Gebiete der positiven Coefficienten $f_1(1, u, 0)$ für alle ausser den zwei äussersten Werthen von u sich auf Linien beschränken, ebenso analog, dass für die zwei äussersten Werthe von v die Punkte $\frac{f_1(1, u, 0)}{F_1(1, 0, -v)}$ auf je einem Rand von Gebieten der positiven Coefficienten $F_1(1, 0, -v)$ liegen, und dass die Gebiete der positiven Coefficienten $F_1(1, 0, -v)$ für alle ausser den zwei äussersten Werthen von v sich auf Linien beschränken.

Würde sich auch eines der zweimal zwei hier ausgeschlossenen Gebiete auf eine Linie beschränken, so würde dies der Voraussetzung V für die nächstfolgenden Ränder dieser Gebiete widersprechen. Die vier in Betracht gekommenen Ränder dieser vier Gebiete bilden in der Art ein Vierseit, dass diese Gebiete selbst, als von ihren Rändern umschlossene Flächenstücke betrachtet, ausserhalb des Vierseits liegen. Ist $u' > 2$, so liegen innerhalb des Vierseits $u' - 2$ Gebiete von Coefficienten $f_1(1, u, 0)$. Dieselben beschränken sich auf Linien, die weder sich unter einander, noch die Ränder der zwei übrigen Gebiete von Coefficienten $f_1(1, u, 0)$ schneiden können, wie aus den Gleichungen dieser Linien $\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{b}_1 u = 0$ hervorgeht. Das Analoge gilt, wenn $v' > 2$ ist, bezüglich der Linien $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{C}_1 v = 0$, welche die ersteren gitterartig durchschneiden. In dem Beispiel der Figur 1 ist nirgends zugleich $u' > 2$ und $v' > 2$, sodass diese beiderlei Linien nirgends zugleich vorkommen. Für die Auffindung fernerer Gebiete sind diese im Innern eines solchen Vierseits gelegenen sich auf Linien beschränkenden Gebiete ohne Bedeutung, wesshalb ich sie bei den späteren Beispielen gar nicht mehr berücksichtige.

Wendet man das Betrachtete auf je die beiden Ränder an, welche in den Ecken von Gebieten positiver Coefficienten A und a zusammen treffen,

so erkennt man, *soweit die Voraussetzung V erfüllt ist*, Folgendes: *Jedes Eck eines Gebietes von* A *ist zugleich ein Eck eines Gebietes von a und umgekehrt.* Ferner: *Wenn zwei einander zugekehrte Ränder von Gebieten zweier Coefficienten a von den zwei Ecken eines Randes eines Gebietes von* A *ausgehen, so endigen sie auch in den zwei Ecken eines dem letzteren zugekehrten Randes eines Gebietes eines anderen Coefficienten* A. In Figur 1 ist zwar der erste, aber nicht der zweite Satz allenthalben erfüllt. Die Voraussetzung V ist nämlich nicht erfüllt an dem schon oben erwähnten Rande zwischen den Punkten $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$, welche, wenn $f_1 = \begin{pmatrix} 2, & -9, & -1 \\ 1, & -1, & -5 \end{pmatrix}$ gesetzt wird, durch $\frac{f_1(1,0,0)}{A_1}$ und $\frac{f_1(1,-1,0)}{A_1}$ bezeichnet werden können. Denn es ist $F_1(1,0,-1) < 0$, während $f_1(1,\alpha_1,\alpha_2)$ für keinen mit irgend einem ganzen Werth von α_1 verbundenen positiven ganzen Werth von α_2 positiv wird.

Ich behandle den Fall, dass die Voraussetzung V erfüllt ist, als die Regel, den gegentheiligen als Ausnahme. Ist sie nämlich bei einem Gebiete von A für einen Rand nicht erfüllt, auf welchem Punkte $\frac{f(1,u,0)}{A}$ liegen, während $f(1,u,1) \leqq -1$ ist für alle ganzen Werthe von u, so muss der grösste Werth, welchen $f(1,u,1)$ bei stetig veränderlichem u annehmen kann, positiv, also

$$f\left(1, \frac{g+k}{-b}, 1\right) = a + 2h + c - \frac{(g+k)^2}{b} \geqq \frac{1}{-b},$$

dagegen, da für den nächstgelegenen ganzen Werth $u_1 = \frac{g+k}{-b} \pm \delta$ von u schon $f(1,u_1,1) \leqq -1$ ist, derselbe Ausdruck

$$a + 2h + c - \frac{(g+k)^2}{b} \leqq -b\delta^2 - 1$$

sein, während $\delta^2 < \frac{1}{4}$ und für $-b$ durch die für die äussersten Werthe von u zu nehmende Bedingung $f(1,u,0) \geqq 1$ Grenzen gesetzt sind.

Wenn die Voraussetzung V für einen Rand erfüllt ist, so besteht das besprochene Vierseit, und ist sie also für die vier dasselbe bildenden Ränder erfüllt. *Soweit die Voraussetzung V gilt, zerfällt also die Hyperboloidfläche in von gewissen Rändern umgebene Gebiete von* A, *ebensolche von a*

und die besprochenen Vierseite. Diese Flächenstücke schliessen sich alle gegenseitig aus und erfüllen doch ohne Lücke die ganze Fläche. Hat man hinreichend weit nach allen Seiten die Gebiete entwickelt, so müssen sich früher schon dagewesene wiederholen und lässt sich die fernere Entwicklung auf die frühere zurückführen. Es ist nicht nöthig, die Formen f, welche Kreuzungspunkte $\frac{a}{A}$ geben, so zu transformiren, dass die Formen $\mathfrak{f}$ reducirt werden, welche, nachdem ihre Betrachtung die unter der Voraussetzung V stattfindende Möglichkeit dieser Entwicklungen gezeigt hat, gar nicht mehr beachtet zu werden brauchen. Um bei Kreuzungspunkten $\frac{a'}{A'}$, in welchen numerisch a' und A' mit den bei einem früheren Kreuzungspunkt $\frac{a}{A}$ aufgetretenen Coefficienten a und A übereinstimmen, sofort auch über die numerische Uebereinstimmung der zu Grunde liegenden Formen f' und f entscheiden zu können, transformire ich, was auch bei der Entwicklung der einzelnen Gebiete von Coefficienten A nützlich ist, alle auftretenden Formen durch Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ so, dass (b, g, c) reducirt ist. Zur Entwicklung der Gebiete von Coefficienten a ist eine vorübergehende Transformation, welche (B, G, C) reducirt macht, oft nützlich. Es ist auch nicht nothwendig, jedem einzelnen Rande eines Gebietes von A entsprechend mittels einer eigenen Substitution die Form f in die oben angenommene Form f_1 zu verwandeln. Denn da die den einzelnen $u'\cdot v'$ betrachteten Kreuzungspunkten entsprechenden Ausdrücke $f_1(1, u, 0)$ und $F_1(1, 0, -v)$ erhalten werden durch in beliebiger Reihenfolge geschehende Anwendung der Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ auf f_1 oder der Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{vmatrix}$ auf F_1, so werden diese Ausdrücke, wenn vorher eine Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ eingeschaltet worden ist, $f(1, u\beta_1, u\beta_2)$ und $F(1, v\beta_2, -v\beta_1)$.

Ich will einige Beispiele entwickeln, bei welchen, was bei geringer

Anzahl numerisch verschiedener Gebiete ebenfalls das Häufigste ist, die Voraussetzung V allenthalben erfüllt ist. In den Figuren bedeuten die geschlängelten Linien, von welchen je einige an Ecken zusammenhängende eine positive Zahl A umschliessen, die Ränder des Gebietes dieses Coefficienten A, ebenso die glatten die Ränder der Gebiete der positiven Coefficienten a, die punktirten Axen der Symmetrie. Auf den Rändern sind die keine Ecken bildenden Punkte $\frac{f_1(1, x, 0)}{\mathrm{A}_1}$ und $\frac{a_1}{F_1(1, 0, -x)}$ besonders hervorgehoben, ebenso auf Axen der Symmetrie die auf ihnen gelegenen Punkte $\frac{a}{\mathrm{A}}$. Ich gehe in der Darstellung sogleich von einer derjenigen Formen der gewählten Klasse aus, von welcher aus sich die stattfindenden Symmetrieen am einfachsten darstellen, in dem Beispiel der Figur 2 von der Form $f = \begin{pmatrix} 1, & -2, & -2 \\ 1, & 0, & 1 \end{pmatrix}$. Der Punkt $\frac{1}{3} = \frac{f(1, 0, 0)}{\mathrm{A}}$ gehört mit den Punkten $\frac{1}{3} = \frac{f(1, 1, 0)}{\mathrm{A}}$ und $\frac{1}{3} = \frac{f(1, 1, 1)}{\mathrm{A}}$ einem Gebiete von $\mathrm{A} = 3$ an. Da f durch die entsprechenden Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ oder, wenn die Determinante $= 1$ sein soll, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ in sich selbst übergeht, so erkennt man bereits eine dreitheilige Symmetrie, und sogar eine sechstheilige, da jeder der drei symmetrischen Ränder wieder in sich selbst seinen zwei Enden zu symmetrisch ist. Da die adjungirte Form $F = \begin{pmatrix} 3, & -2, & -3 \\ -1, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ für $F(1, 0, 1)$ und, wie hiernach schon aus der gefundenen Symmetrie folgt, für $F(1, 1, -1)$ positive Werthe giebt, ist für die zwei vom Punkte $\frac{f(1, 0, 0)}{F(1, 0, 0)}$ ausgehenden Ränder die Voraussetzung V erfüllt. Da aus F durch jede der beiden Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ die Form $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -3 \\ -1, & -2, & 1 \end{pmatrix}$ entsteht, welche durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

in sich selbst übergeht, so erkennt man, dass das Gebiet von $a = 1 = f(1,0,0)$ ausser der durch den Punkt $\frac{1}{F(1,0,0)}$ gehenden Axe der Symmetrie noch durch eine andere solche Axe durchschnitten wird, welche die erste in einem Mittelpunkt viertheiliger Symmetrie, dem Kreuzungspunkt $\frac{1}{F(1,1,0)}$ schneidet. Dieses Gebiet hat demnach sechs Ecken, nämlich in der Reihenfolge, in welcher sie mit einander durch Ränder verbunden sind, die Punkte

$$\frac{1}{F(1,0,0)},\ \frac{1}{F(1,0,1)},\ \frac{1}{F(1,1,1)},\ \frac{1}{F(1,2,0)},\ \frac{1}{F(1,2,-1)},\ \frac{1}{F(1,1,-1)}.$$

Von den an die Ränder des Gebietes von $A = 3$ sich anschliessenden Vierseiten sind nach den bekannten Symmetrieen bereits je die vier Ecken bekannt, nämlich z. B. zu den zwei Ecken $\frac{f(1,0,0)}{F(1,0,0)}$ und $\frac{f(1,1,0)}{F(1,0,0)}$ die natürlich ebenfalls zu einander symmetrischen $\frac{f(1,0,0)}{F(1,0,1)}$ und $\frac{f(1,1,0)}{F(1,0,1)}$. Man erkennt, dass auch für die diesem Vierseit nicht angehörenden von diesen neuen Ecken ausgehenden Ränder die Voraussetzung V erfüllt ist, da z. B. die durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ aus f hervorgegangene Form $\begin{pmatrix} 1, & -2, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}$, welche, wie schon gesehen, durch die weitere Substitution $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ zu dem folgenden Eck $\frac{1}{F(1,1,1)}$ des Gebietes von $a = f(1,0,0)$ führt, auch durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ eine Form mit positivem ersten Coefficienten giebt. Diese Form $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ ergiebt eine neue Axe der Symmetrie, und man ist nun mit der nöthigen Zahlenbetrachtung bereits zu Ende. Da bei numerischer Uebereinstimmung zweier Formen wie die früher betrachteten Felder so auch die Gebiete, ihre Ränder und Ecken übereinstimmen müssen, so erkennt man das durch Figur 2 Dargestellte. Die sechs Schnittpunkte der sechs angegebenen Axen der Symmetrie sind Mittelpunkte vierfacher Symmetrie, was durch die gewählten rechten Winkel angedeutet werden soll,

wie in anderen Beispielen λ-fache Symmetrie durch die Winkel $\frac{4R}{\lambda}$. Denkt man sich die Zeichnung so in sich verschoben, dass zwei solche auf einander senkrechte Axen gerade Linien werden, so hat man keine Schwierigkeit, die Vervierfachung der Figur sich vorzustellen, und dasselbe lässt sich an je zwei sich schneidenden an der Grenze der erweiterten Figur liegenden Axen ausführen. Von der sechsfachen um den Mittelpunkt der Figur herum stattfindenden Symmetrie habe ich der Uebersichtlichkeit wegen keinen Gebrauch zur Verkleinerung der anzugebenden Figur machen wollen.

Für zwei andere Beispiele mögen die Figuren allein (3 und 4) genügen, in welchen ich noch zu aussen gelegenen Punkten $\frac{a}{A}$ die Formen $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ g, & h, & k \end{pmatrix}$ beisetze, welche in denselben $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ geben, wogegen dann die besondere Angabe von A und a wegfallen kann.

Für die Stellen, an welchen die Voraussetzung V nicht erfüllt ist, könnte ich einfach auf die ursprüngliche Methode der Eintheilung in Felder verweisen. Doch lässt sich auch über diese hinweg die Entwicklung in der zuletzt gebrauchten abgekürzten rein arithmetischen Art fortführen. Ich werde mich nur dieses Rückhaltes wegen kurz fassen, und die entlegensten Ausnahmefälle nicht verfolgen. Sind a und A positiv, und ist der Punkt $\frac{a}{A}$ ein Eck des Gebietes von A, von welchem der die Punkte $\frac{f(1, u, 0)}{A}$ für $0 \gtrless u \leq u'$ enthaltende Rand desselben ausgeht, während es keine Punkte $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$ mit negativem Werth von α_2 verbunden mit irgend einem von α_1 in dem Gebiete giebt, und ist $F(1, 0, 1) < 0$, also die Voraussetzung V nicht erfüllt für diesen Rand, so existirt also das oben besprochene sich an den Rand nach aussen zu anschliessende Vierseit nicht, dann ist also auch für den diesem Rande zugewendeten Rand des Gebietes von a, welchem, wenn überhaupt ein solches vorhanden ist, der Punkt $\frac{a}{A}$ als Eck angehört, die Voraussetzung V nicht erfüllt, ebenso für den dem letztbetrachteten zugewendeten Rand des neuen Gebietes von A', welches, wenn überhaupt vorhanden, den Endpunkt des letztbetrachteten Randes als Eck hat, u. s. w.

Offenbar giebt der Inbegriff aller dieser auf einander folgender Ränder von abwechselnden Gebieten verschiedener A und a eine fortlaufende Grenze, über welche nach einer Seite zu hinaus die Voraussetzung V nicht erfüllt ist. Ein in Betracht kommendes Gebiet kann hier auch in eine Linie degeneriren, welche natürlich nach zwei entgegengesetzten Seiten zu als Rand desselben anzusehen ist. Es ist dann möglich, dass nur nach einer Seite oder wie in dem Beispiel der Figur 5 bei dem Gebiet von $A = 12$ nach beiden Seiten dieses Randes zu die Voraussetzung V nicht erfüllt ist. Im letzten Falle bildet dieser Rand nach beiden Seiten zu eine Grenze der besprochenen Art. Eine solche Grenze findet man auch dann, wenn sich an den Endpunkt eines der betrachteten Ränder gar kein neues Gebiet anschliessen sollte, indem man nämlich, wenn, wie z. B. bei der Form $\begin{pmatrix} 44, & -45, & -46 \\ -22, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ mit der adjungirten $\begin{pmatrix} 1586, & -2028, & -1981 \\ 970, & 68, & 2 \end{pmatrix}$ dieser Endpunkt $\frac{a}{A}$ einem Gebiete von A angehört, und die Bedingung $F(1, \mu, \nu) > 0$ nur für $\mu = \nu = 0$ erfüllt ist, den von diesem Punkte ausgehenden folgenden Rand des Gebietes von A verfolgt. Bei dieser fortlaufenden Grenze kann nun erstens der Fall eintreten, dass sie in der Art in sich zurückläuft, dass die Gebiete, zu welchen die einzelnen Ränder gehören, ausserhalb der geschlossenen Linie liegen. Dieser Fall tritt in dem Beispiel der Figur 1 ein, wo die bezüglichen Ränder, deren Gesammtheit erst nach der nach links oben anzufügenden Ergänzung auftritt, und von welchen einer schon oben besprochen wurde, ein abwechselnd aus Rändern von Gebieten positiver Coefficienten A und a bestehendes Sechsseit bilden. Der analoge Fall tritt ein in dem in Figur 5 durchgeführten Beispiel, welches keiner näheren Erläuterung mehr bedarf, und in Figur 6, bei welcher jedoch eine Seite des Sechsseits, ein Rand eines Gebietes von $a = 0$, in unendliche Entfernung fällt. Bei den oben gemachten Annahmen ist von zwei vom Punkte $\frac{a}{A}$ ausgehenden, Punkte $\frac{a}{F(1, \mu, \nu)}$ tragenden Rändern des Gebietes von a dem die Punkte $\frac{f(1, u, 0)}{A}$ tragenden Rande des Gebietes von A offenbar derjenige zugekehrt, in welchem das Verhältniss $\frac{\mu}{\nu}$ der zwei nothwendig

positiven Zahlen μ, ν, welches für diesen Rand unter der Voraussetzung V gleich Null wäre, das kleinere ist.

Da das von der in sich zurücklaufenden Grenze, in den angeführten Beispielen einem Sechsseit, eingeschlossene Flächenstück ebenso unbeachtet bleiben kann, als im Falle der Voraussetzung V das besprochene Vierseit, so sieht man, dass der betrachtete Fall kein Hinderniss in der weiteren Entwicklung der Gebiete darbietet. Zweitens kann nun die besprochene Grenze auch beiderseits ins Unendliche gehen, sodass natürlich numerisch übereinstimmende Formen periodisch an der Grenze wiederkehren. Für diesen Fall führe ich die Formen $\begin{pmatrix} 2r, & -2r, & 2r-s \\ 0, & 0, & r \end{pmatrix}$ an, in welchen, wenn $4r < s < \frac{9}{2}r$ ist, nur die abwechselnden Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ abwechselnd neue positive Werthe an die Stellen von a und A bringen.

Drittens kann die besprochene Grenze so in sich selbst zurücklaufen, dass die Gebiete, an deren zusammenhängenden Rändern die Ausnahme stattfindet, innerhalb der geschlossenen Linie liegen. Die Anzahl dieser Gebiete kann auch eins sein, dasselbe kann sich auch auf eine Linie beschränken, endlich kann es sogar einzelne Punkte $\frac{a}{A}$ von der Art geben, dass $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$ nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und $F(1, \mu, \nu)$ nur für $\mu = \nu = 0$ positiv sind, wofür als Beispiel die Form $\begin{pmatrix} 44, & -47, & -47 \\ 20, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ mit der adjungirten $\begin{pmatrix} 1809, & -2069, & -2069 \\ -879, & 67, & 67 \end{pmatrix}$ dienen möge.

Um nun, wenn $\frac{f(1, \varkappa, 0)}{A}$ die einzelnen Punkte eines Randes eines Gebietes von A sind, zu welchem für keinen mit irgend einem Werth von α_1 verbundenen negativen Werth von α_2 Punkte $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$ gehören, über diesen Rand hinaus die Entwicklung fortzusetzen, wenn auch für denselben die Voraussetzung V nicht erfüllt, wenn also $F(1, 0, 1) < 0$ ist, wende man auf F aus den nach II. b), S. 155 zu findenden Substitutionen $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & \nu_2 \end{vmatrix}$ von der Determinante 1, welche $F(\lambda, 0, \nu) \geqq 1$, $F(\lambda_2, 0, \nu_2) \leqq -1$ machen, diejenige die kleinsten positiven Coefficienten besitzende an, durch welche

$f(\nu_2, \alpha_1, -\lambda_2)$ für irgend einen ganzen Werth von α_1 positiv wird. Die hiedurch aus F entstehende Form bezeichne ich mit F'. Sollten zu dem beabsichtigten Ziele, welches in der Regel nach dem ersten Schritte erreicht sein wird, keine kleineren Coefficienten $\lambda, \nu, \lambda_2, \nu_2$ hinreichen, so doch jedenfalls die kleinsten nach S. 197 zu findenden, welche mittels einer Substitution $\begin{vmatrix} \nu_2 & 0 & -\nu \\ \alpha_1 & 1 & \gamma_1 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ die Form $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ g, & h, & k \end{pmatrix}$ in die $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ \pm\varepsilon g, & \pm h, & \varepsilon k \end{pmatrix}$ verwandeln.

Die Reihe der Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, aus welchen die $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & \nu_2 \end{vmatrix}$ zusammengesetzt ist, schliesst mit der $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, weil nur durch diese die in $f(\nu_2, \alpha_1, -\lambda_2)$ vorkommenden Zahlen ν_2, λ_2 geändert werden, und die Bedingungen für $F(\lambda, 0, \nu)$ und $F(\lambda_2, 0, \nu_2)$ nach jeder der einzelnen Substitutionen erfüllt sind. Hieraus folgt, dass $F'(1, 0, -1) < 0$ und $f'(1, u, v) < 0$ ist für alle mit ganzen Werthen von u verbundenen positiven ganzen Werthe von v. Denn, wenn v nicht grösser als die Anzahl p der Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ist, welche zum Schlusse angefügt worden sind, so folgt dies daraus, dass ausserdem schon für kleinere Werthe von p die Bedingungen erfüllt gewesen wären, wenn aber $v > p$ ist, daraus, dass die auf F angewandte Substitution $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & \nu_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ dann einen positiven dritten Coefficienten hervorbringen würde. Giebt es wenigstens zwei Punkte $\frac{f'(1, u, 0)}{F'(1, 0, 0)}$, so gehören also diese Punkte wieder einem Rande an, für welchen die Voraussetzung V nicht erfüllt ist, also wieder einer Grenze der besprochenen Art. Sollten zwischen diesen Rand und den ursprünglichen, die Punkte $\frac{f(1, u, 0)}{A}$ enthaltenden noch andere Gebiete eingeschoben sein, was sich am Einfachsten durch Betrachtung der auf der Linie $\eta = 0$ auftretenden Felder entscheiden lässt, so hätte sich schon eine nähere Grenze finden lassen, indem man an den geeigneten Stellen Substitutionen eingeschaltet hätte, welche auch an die Stelle

von b andere Coefficienten gebracht hätten. Eine nähere Betrachtung dieses Falles, sowie desjenigen, in welchem es ausser für $u = 0$ keinen Punkt $\frac{f(1, u, 0)}{F(1, 0, 0)}$ giebt, welcher Fall wieder in der Regel gegen den anderen keinen wesentlichen Unterschied begründet, übergehe ich, indem ich auf die allgemeine auf die Feldereintheilung gegründete Methode verweise.

Ob nun die neue Grenze in ihrem ganzen Verlauf der alten gegenüber liegt, oder ob anderen der Ränder, aus welchen sie bestehen, wieder auf dieselbe Weise zu findende Ränder anderer Grenzen gegenüber liegen, immer wird man die Gruppen von Gebieten, welche zwar wie durch Ströme von einander getrennt sein, aber nach Bedürfniss wie durch Brücken verbunden werden können, so weit entwickeln können, bis alle neu auftretenden Formen mit schon dagewesenen numerisch übereinstimmen.

e) Die Transformationen der Formen in sich selbst.

Ausser den schon in IV. b) betrachteten Substitutionen, welche bei einer reducirten Form f nur möglich sind, wenn ihr Feld mit sich selbst nach einer Vertauschung unter a, b, c, d oder mit einem unmittelbar benachbarten zusammenfällt, *giebt es immer noch unendlich viele Substitutionen, durch welche f in sich selbst übergeht, indem durch jedes neue Feld, für welches eine mit f numerisch übereinstimmende Form reducirt ist, eine neue solche Substitution bestimmt wird*, welche gewissermassen einer Verbindungslinie zwischen dem ursprünglichen und dem neuen Felde, oder wenn man anstatt der Felder nur analoge Kreuzungspunkte betrachtet, einer Verbindungslinie der zwei Kreuzungspunkte entspricht. Da die ganze Hyperboloidsschale ohne Lücke durch die unendlich oft zu wiederholenden in IV. c) und d) besprochenen und gezeichneten Figuren bedeckt ist, so kann eine Verbindungslinie zwischen einem äusseren Ecke einer solchen Figur und einer Wiederholung desselben aus den Grenzlinien dieser Figur und ihren in geeigneter Reihenfolge und Richtung zu nehmenden Wiederholungen gebildet werden. *Die* entsprechende *Substitution kann* also *zusammengesetzt werden aus Substitutionen von der in* IV. b) *besprochenen Art*, welche der Vertauschung analoger Feldergrenzen oder dem Ueberschreiten von Axen der Symmetrie entsprechen, *und den wenigen Substitutionen $P, Q, R, S, \ldots$*,

welche den äusseren Grenzlinien der Figur entsprechen, und von welchen, da diese Grenzlinien ein Polygon bilden, auch noch mindestens eine durch die übrigen ausgedrückt werden kann.

Geometrisch würde sich nun die Frage darbieten, wie diese Verbindungslinie aus der geringsten Anzahl der genannten Stücke zusammengesetzt werden kann, wobei die verschiedenartigen Stücke entweder gleich zu behandeln wären, oder etwa so, dass vor Allem die Stücke einer Art in möglichst geringer Anzahl eintreten sollen, dann die einer zweiten in möglichst geringer Anzahl u. s. w. Dieser geometrischen Frage entspricht genau die nach der Zusammensetzung der zu betrachtenden Substitutionen aus den genannten einzelnen Substitutionen $P, Q, R, S, \ldots$ Da jedoch nicht nur die Art der möglichen Symmetrieen, sondern auch die Anzahl der Substitutionen $P, Q, R, S, \ldots$ in den einzelnen Klassen verschieden ist, so ist es nicht wohl möglich, den wünschenswerthen Ausdruck, welcher jede mögliche der gesuchten Substitutionen ein und nur einmal giebt, ganz im Allgemeinen aufzustellen, während seine Aufstellung in jedem gegebenen Falle keine Schwierigkeit hat.

Ich will deshalb diesen Ausdruck nur für die einzelnen im Bisherigen behandelten Beispiele aufstellen. In Figur 1 werde mit P die aus $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ zusammengesetzte Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ bezeichnet, durch welche die Form $f = \begin{pmatrix} 12, & -1, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ in die $f_1 = \begin{pmatrix} 3, & -4, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ übergeht, und welche der unten rechts gelegenen äusseren Grenzlinie entspricht, die den Punkt $\frac{12}{5} = \frac{a}{A}$ mit dem $\frac{3}{20} = \frac{a_1}{A_1}$ verbindet. Mit Q werde die aus $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ entstehende Substitution $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ bezeichnet, welche vom unteren zum oberen Endpunkte der rechten äussersten Grenzlinie, zu dem, wenn $f' = \begin{pmatrix} 3, & -1, & -20 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ gesetzt wird, mit $\frac{3}{20} = \frac{a'}{A'}$ zu bezeichnenden Punkte führt. Die vom Punkt $\frac{3}{20} = \frac{a_1}{A_1}$ nach links führende äussere Grenzlinie, welche nicht in einem so hervorragenden Punkte endigt,

denke ich mir nach Ueberschreitung der Symmetrieaxe, durch welche sie geschnitten wird, der stattfindenden Symmetrie gemäss noch einmal aufgetragen und bezeichne mit R die aus $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ zusammengesetzte Substitution $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, welche vom Punkt $\frac{3}{20} = \frac{a_1}{A_1}$ zu seiner Wiederholung $\frac{3}{20} = \frac{f_1\,(4,\ 0,\ \ 3)}{F_1\,(4,\ 0,\ -5)}$ führt. Ebenso denke ich mir die vom Punkte $\frac{3}{20} = \frac{a'}{A'}$ nach links führende äussere Grenzlinie verdoppelt, und bezeichne mit S die aus $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ zusammengesetzte Substitution $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, welche vom Punkt $\frac{3}{20} = \frac{a'}{A'}$ zu seiner Wiederholung, dem Punkt $\frac{3}{20} = \frac{f\,(2,\ \ \ 3,\ 0)}{F\,(2,\ -1,\ 0)}$ führt. Die der vierfachen um den Durchschnittspunkt der zwei noch übrigen Grenzlinien stattfindenden Symmetrie gemäss vervierfachte Figur ist nun blos von viererlei, den vier Substitutionen P, Q, R, S entsprechenden Linien, welche ich auch selbst mit den Buchstaben P, Q, R, S bezeichne, begrenzt. Längs des Randes dieser vervierfachten Figur gelangt man von dem Punkte $\frac{12}{5} = \frac{a}{A}$ aus zu dem diametral gegenüberliegenden durch die Substitution $\begin{vmatrix} 29 & -5 & -15 \\ 60 & -11 & -30 \\ 36 & -6 & -19 \end{vmatrix}$, welche sowohl dem Durchlaufen der einen als der anderen Gruppe von sechs dahin führenden Grenzstücken entspricht, welche nämlich, wenn ich $P.\ R.\ P^{-1} = \begin{vmatrix} -13 & 3 & 5 \\ -36 & 8 & 15 \\ -12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ mit T und $Q.\ S.\ Q^{-1} = \begin{vmatrix} -17 & 2 & 10 \\ -24 & 2 & 15 \\ 24 & 3 & 14 \end{vmatrix}$ mit U bezeichne, sowohl $= T \cdot U$ als $= U \cdot T$ sein muss.

Denkt man sich die Linie P über ihren Endpunkt hinaus fortgesetzt, indem man der an der Linie R stattfindenden Symmetrie gemäss die bis-

herige Figur wiederholt, so ist zunächst die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ anzuwenden, durch welche die Form $\begin{pmatrix} 3, & -4, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ dieser Symmetrie gemäss in sich selbst übergeht. Die Substitution P^{-1} führt dann zur nächsten Wiederholung des Punktes $\frac{12}{5}$, sodass man für die Form f die natürlich sich selbst reciproce Substitution $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -24 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ erhält, durch welche sie in sich selbst übergeht. Will man auch den letzten Endpunkt überschreiten, so hat man noch der an der Linie Q stattfindenden Symmetrie gemäss die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ beizufügen, sodass man im Ganzen die Substitution $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 24 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ erhält, durch welche f in sich selbst übergeht, genau dieselbe, zu welcher die Anwendung der Vorschriften von II. b auf die Form (12, 0, —1) geführt hätte. Ich bezeichne dieselbe mit V. Bei weiterem Fortgang auf der Linie P findet natürlich völlige Congruenz mit dem Ursprünglichen statt, insbesondere geht von dem Punkte $\frac{12}{5} = \frac{f(7,\ 24,\ 0)}{F(7,\ -2,\ 0)}$ wie von dem $\frac{12}{5} = \frac{a}{A}$ nach ein und derselben Seite der Linie P hin eine Linie Q ab, nach der andern Seite, nachdem die dem Ueberschreiten der Linie P entsprechende Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ angewandt worden ist, ebenfalls eine Linie Q. Zu allem von P Gesagten gilt das Analoge von Q. Die Substitution $Q \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot Q^{-1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ bezeichne ich mit W. Man hat sich nun nicht nur die ursprünglichen Linien P und Q beiderseits ins Unendliche fortgesetzt zu denken, sondern auch ebenso die unendlich vielen dieselben kreuzenden Linien Q und P, dann die doppelt unendlich vielen die letzteren kreuzenden u. s. w., sodass man ein Linien system erhält, welches gewissermassen einem in Luft und Erde in der Art verzweigten Baume

gleicht, dass der Stamm sowohl als jeder Ast von unendlich vielen discreten Stellen aus, durch welche derselbe hindurchgeht, je zwei neue Aeste nach entgegengesetzten Seiten aussendet, und dass kein Ast mit irgend einem andern in Berührung kommt, ausser dem, aus welchem er entspringt, und denen, welche aus ihm entspringen. Der Vergleich hinkt nur insofern, als bei mir Alles in einer der Hyperboloidsschale entsprechenden Fläche liegen soll, und als die Aeste von zweierlei Arten V und W sein müssten, so dass die der einen nur solche der anderen Art aussenden. Da die Verzweigung allerseits ins Unendliche fortgesetzt werden soll, so lässt sich durch die geeigneten und zulässigen Verschiebungen jedes einzelne Stück der einen Art mit jedem derselben Art zur Congruenz bringen. Von jedem Punkte des Systems giebt es zu jedem anderen Punkte desselben einen und nur einen Weg. Entsprechend giebt es von jedem Punkte, z. B. von dem $\frac{12}{5} = \frac{a}{A}$ zu jedem anderen $\frac{12}{5}$ dieses Systems eine und nur eine Substitution, abgesehen von den zulässigen, dem Ueberschreiten der Linien entsprechenden Zeichenwechseln ganzer Vertikalreihen. Diese Substitution ist enthalten in dem allgemeinen Ausdruck $V^{v_0} . W^{w_0} . V^{v_1} . W^{w_1} \dots V^{v_\varkappa} . W^{w_\varkappa}$, welchen ich mit E bezeichnen will, und in welchem die Exponenten beliebige positive oder negative ganze Zahlen, v_0 und $w_\varkappa$ auch Null sein können. Durch E ist noch keineswegs der allgemeinste Ausdruck aller Substitutionen gegeben, durch welche überhaupt f in sich selbst übergeht, denn je von den Mittelpunkten der sämmtlichen Stücke von der Art V gehen nach beiden Seiten dieser Stücke Linien R aus, welche zu analogen Mittelpunkten ähnlichen Liniensystemen angehörender Stücke der Art V führen, und ebenso gehen je von den Mittelpunkten der sämmtlichen Stücke von der Art W nach beiden Seiten dieser Stücke Linien S aus, welche zu analogen Mittelpunkten ähnlichen Liniensystemen angehörender Stücke der Art W führen. Die sämmtlichen hiermit neu eingeführten Liniensysteme stehen weder mit den ursprünglichen noch unter einander in Berührung. Auch die von den entsprechenden Punkten derselben natürlich wiederum ausgehenden Linien R und S verbinden nicht zwei dieser Liniensysteme unmittelbar, sondern führen wieder zu neuen ähnlichen Liniensystemen, jetzt aber nicht zu lauter verschiedenen, wie die Betrachtung des oben besprochenen aus Linien

P, Q, R, S gebildeten Zwölfeckes darthut. Von dem ganzen Gebilde kann man sich eine Vorstellung machen, wenn man bedenkt, dass das erstbetrachtete Liniensystem nirgends geschlossene Polygone bildet, sondern die Fläche nur in unendlich viele ins Unendliche verlaufende Streifen theilt. Bei der nächsten oben angedeuteten Entwicklung entstehen in jedem solchen Streifen unendlich viele neue natürlich geeignet gekrümmte ebensolche Liniensysteme, die ich mit L_h bezeichnen will, nämlich je eines zu je einem Stücke V oder W der Begrenzung des Streifens, je nachdem der Index h gerade oder ungerade ist. Die unendlich vielen Streifen, welche jedes der neuen Liniensysteme L_h aus dem erstbetrachteten Streifen ausscheidet, sind natürlich wieder ebenso wie dieses zu behandeln u. s. f. Dieselbe Rolle, wie die vollständige Begrenzung eines solchen Streifens, spielt aber auch die äusserste Grenzlinie eines Liniensystems L_h, welche ja durch die erlaubte Verschiebung des ganzen Gebildes in eine solche Begrenzung verwandelt werden könnte. Von den von dieser Grenze zunächst eingeschlossenen unendlich vielen Liniensystemen ist nun erst ein einziges, das ursprüngliche, gebildet. Das nächste nach der einen Seite zu fällt mit einem in analoger Weise zu L_{h+1} gehörenden, das nächste nach der anderen Seite zu mit einem in analoger Weise zu L_{h-1} gehörenden zusammen.

Bezeichnet man mit Γ und Δ die Substitutionen $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, und setzt γ und δ gleich 0 oder 1, und, da auch T und U sich selbst reciprok sind, auch t und u nur gleich 0 oder 1, so entsteht durch die Verbindung verschiedener Substitutionen $E \cdot \Gamma^\gamma \cdot \Delta^\delta \cdot T^t \cdot U^u$ ein Ausdruck, welcher alle Transformationen der Form $\begin{pmatrix} 12, & -1, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ in sich selbst giebt und zwar jede nur einmal. Nur wenn Substitutionen E sich auf die $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ beschränken, sind Zusammenziehungen in Potenzen von $T \cdot \Delta$ und $U \cdot \Gamma$ möglich. Die in diesem Ausdruck enthaltenen Substitutionen T, U, V, W, welche auch einzeln f in sich selbst verwandeln, kann man auch, wie gesehen, ersetzen durch die kleinere Coefficienten

besitzenden Substitutionen P, Q, R, S, und selbst R und S waren schon je durch Verdoppelung einer Strecke entstanden.

Um das Beispiel der Figur 5 möglichst ähnlich zu behandeln, betrachte ich die Form $\begin{pmatrix}1, -2, -15\\ 0, \quad 0, \quad 0\end{pmatrix}$, bezeichne die vom Punkte $\frac{1}{30}$ nach dem $\frac{2}{15}$ führende Substitution $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ mit Q, die der verdoppelten linken äussersten Grenzlinie entsprechende von demselben Punkt $\frac{1}{30}$ über den Punkt $\frac{1}{12}$ mit Ueberschreitung der linken oberen Symmetrieaxe zu seiner Wiederholung $\frac{1}{30}$ führende sich selbst reciproce Substitution $\begin{vmatrix}-4 & 0 & 15\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}$ mit R, die der verdoppelten rechten äussersten Grenzlinie entsprechende $\begin{vmatrix}-11 & 0 & 30\\ 0 & -1 & 0\\ -4 & 0 & 11\end{vmatrix}$ mit S, während die oben mit P bezeichnete Linie wegfällt, so wird das obige $T = R$, das obige $U = Q \cdot S \cdot Q^{-1} = \begin{vmatrix}-21 & 20 & 60\\ -10 & 9 & 30\\ -4 & 4 & 11\end{vmatrix}$, und wieder $T \cdot U = U \cdot T$. Ich setze wieder $Q \begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} \cdot Q^{-1} \cdot \begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = W$, so tritt an die Stelle des obigen Systems E von Substitutionen einfach W^{∞}, an die Stelle des entsprechenden Liniensystems einfach eine beiderseits ins Unendliche gehende Linie. Im Uebrigen gilt dasselbe wie oben, nur fällt auch die dort mit V bezeichnete Substitution weg.

Die Figur 3 denke ich mir, um möglichst ähnlich zu verfahren, um den Punkt $\frac{1}{9}$ vervierfacht. Längs der verdoppelten untersten Grenzlinie geht dann die Form $\begin{pmatrix}11, -1, -1\\ 0, \quad 0, \quad 0\end{pmatrix}$ in sich selbst über durch die sich selbst reciproce Substitution $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-10 & 3 & 0\\ -33 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = R$. Die äusserste linke ursprüngliche Grenzlinie führt von

einem Mittelpunkte achtfacher Symmetrie, dem Punkte $\frac{11}{1}$, nach einem Mittelpunkte sechsfacher Symmetrie, welcher, was auch in früheren Fällen nicht störte, kein Punkt $\frac{a}{\mathrm{A}}$ ist. Er ist ein Spaltungspunkt $\mathfrak{f} = \mathfrak{n} = 0$ des Feldes der durch die Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ in sich selbst übergehenden Form $\begin{pmatrix} 3, & -2, & -2 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$. Die dieser Grenzlinie entsprechende Substitution ist $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, oder, wenn man, um die angegebene Form zu erhalten, noch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ beifügt, die $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, die ich mit Q bezeichne. Dem Ueberschreiten der obersten Grenzlinie in der gezeichneten Figur, dem Uebergang in den zweiten Sextanten, entspricht dann die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Von dem ursprünglichen Punkte $\frac{11}{1}$ gelangt man nun zu seiner ihm in der vervierfachten Figur diametral gegenüber liegenden Wiederholung auf zwei Wegen, welchen, wenn ich wieder $R = T$ und $Q \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot Q^{-1} = \begin{vmatrix} -12 & 3 & 2 \\ -33 & 8 & 6 \\ -22 & 6 & 3 \end{vmatrix} = U$ setze, wieder die mit einander identischen Substitutionen $T \cdot U$ und $U \cdot T$ entsprechen. In das dem bisher mit E bezeichneten analoge Liniensystem tritt auch hier wie im vorigen Beispiel nur eine einfache Linie, die Q, ein. Dieselbe geht aber hier von jedem Punkte $\frac{11}{1}$ aus nach vier, von dem genannten Spaltungspunkte und seinen Wiederholungen aus nach drei Richtungen hin, und eine Substitution E entsteht offenbar, wenn ich die Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ mit Σ, Γ, Δ und Λ bezeichne, und σ gleich 1 oder 2, γ, δ und λ gleich 0 oder 1 setze, durch die Zusammen-

setzung verschiedener wie $\Gamma^\gamma \Delta^\delta \Lambda^\lambda Q \Sigma^\sigma Q^{-1}$ gebildeter Substitutionen und schliessliche Beifügung noch einer Substitution $\Gamma^\gamma \Delta^\delta \Lambda^\lambda$. Auch hier wie beim ersten Beispiel hat dieses Liniensystem die Eigenschaft, dass bei auch ins Unendliche fortgehender weiterer Verzweigung die einzelnen Zweige niemals später wieder zusammentreffen. In den unendlich vielen Flächenstreifen, in welche durch dieses System die Fläche getheilt wird, liegen auch hier wieder neue solche Systeme, da ja von jedem Punkte $\frac{11}{1}$ in jedem der vier an ihn stossenden Streifen eine Linie R ausgeht. Aber, wie die betrachtete vervierfachte Figur zeigt, liegen der ganzen Begrenzung eines solchen Streifens nur die äussersten Linien ein und desselben anderen solchen Systems gegenüber. Wie oben lassen sich diese äussersten Linien zusammen auch selbst wie die Begrenzung eines solchen Streifens ansehen. Ein Ausdruck, welcher alle Transformationen der Form $\begin{pmatrix}11, -1, -1\\ 0, \ \ 0, \ \ 0\end{pmatrix}$ in sich selbst giebt, ist also jedenfalls der $E_1 \cdot R \cdot E_2 \cdot R \cdot E_3 \cdot R \cdots$, welcher noch durch die Eigenschaft $T \cdot U = U \cdot T$ in eine solche Gestalt gebracht werden kann, dass er jede Substitution nur einmal giebt, indem man, so oft in einer Substitution E die letzten Factoren $\Lambda\, Q\, \Sigma\, Q^{-1}$ sind, also zusammen U geben, den Factor R vor diese Factoren rücken kann. Wenn $h-1$ auf einander folgende Substitutionen E einfach Γ sind, so tritt natürlich die $h$te Potenz der Substitution $R \cdot \Gamma =$ $\begin{vmatrix}10 & 3 & 0\\ 33 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ auf.

Bei der Form $\begin{pmatrix}3, -1, -1\\ 0, \ \ 0, \ \ 0\end{pmatrix}$ Fig. 4. reicht ausser den der achtfachen Symmetrie derselben entsprechenden Substitutionen Γ, Δ und Λ eine einzige der verdoppelten äussersten rechten Grenzlinie entsprechende sich selbst reciproce Substitution $T = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$ hin, um einen allgemeinen Ausdruck für die Transformationen dieser Form in sich selbst zu bilden. Dieser Ausdruck, welcher einfach durch Zusammensetzung verschiedener Substitutionen $\Gamma^\gamma \Delta^\delta \Lambda^\lambda T$ entsteht, lässt sich in solche Gestalt, dass er jede Substitution nur ein mal giebt, durch Benützung

des Satzes bringen, auf welchen die zwölftheilige Symmetrie am Punkte $\frac{1}{3}$ hinweist, dass nämlich die sechsmalige Wiederholung der Substitution $T \cdot \Lambda$ $= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Identität giebt. Wollte man mit den bei den bisherigen Beispielen betrachteten Liniensystemen E das gegenwärtige aus den Linien T, von welchen je vier in einem Punkte zusammenstossen, gebildete vergleichen, so würden also hier von den von einem Punkte ausgehenden Stücken je die dritten einander zugelegenen wieder mit einander verwachsen sein.

Substitutionen wie die bisher mit E bezeichneten giebt es offenbar für jede Form $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. Ein Beispiel einer Klasse, in welcher keine solche Form vorkommt, ist das in Fig. 2. behandelte. Ich bezeichne jetzt mit f die durch die Substitution $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ aus der oben mit f bezeichneten $\begin{pmatrix} 1, & -2, & -2 \\ 1, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ hervorgehende Form $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, und suche ihre Transformationen in sich selbst. Die Substitution $R = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ führt von dem Punkt $\frac{2}{2} = \frac{f(1, 0, 0)}{F(1, 0, 0)}$ zu dem jenseits einer nicht gezeichneten Symmetrieaxe gelegenen symmetrischen Punkt $\frac{2}{2} = \frac{f(1, 1, 0)}{F(1, 0, 0)}$ und von diesem zu dem auf dem gezeichneten Umfang der Figur folgenden Punkte $\frac{2}{2}$ führt die Substitution $S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$
Die Figur zeigt, dass die Substitution $R \cdot S$ nach dreimaliger Anwendung Identität giebt. Bezeichnet man die Substitutionen $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, welche dem Ueberschreiten der zweierlei gezeichneten

Symmetrieaxen entsprechen, mit $\varDelta$ und $\varPhi$, setzt δ und φ gleich 0 oder 1, und fügt in allen möglichen Reihenfolgen Substitutionen R, S und $\varDelta^\delta$, $\varPhi^\varphi$ zusammen, so erhält man hierdurch einen Ausdruck für alle Transformationen der Form f in sich selbst. Die Relationen $R\varDelta = \varDelta R$, $S\varPhi = \varPhi S$, $\varDelta\varPhi = \varPhi\varDelta$, $R^2 = S^2 = \varDelta^2 = \varPhi^2 = 1$ zeigen, dass man die Substitution $\varDelta$ immer so weit von rechts nach links schieben kann, bis sie unmittelbar nach S, ebenso die $\varPhi$, bis sie unmittelbar nach R zu stehen kommt, sodass dann der ganze Ausdruck ausser dem Anfangsfactor $\varDelta^\delta\varPhi^\varphi$ nur noch positive Potenzen von $R\varPhi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $S\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ enthält, unter welche noch Verbindungen von R und S allein eingestreut sein können, von welchen aber wegen der Relation $(RS)^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ alle ausser R, S, RS, SR, RSR entfernt werden können.

Diese Beispiele werden hinreichen, die schon bei den einfachsten Formen auftretende Mannigfaltigkeit zu zeigen, welche mir die Aufstellung einer alle zugleich umfassenden Formel zur Zeit unthunlich erscheinen lässt, womit ich nicht läugnen will, dass eine gewisse Classification möglich wäre, welche jedoch viel complicirter sein wird, als die analoge u. A. die Krystallsysteme gebende Classification bei den positiven Formen.

In den schon angeführten Abhandlungen von Hrn. *Hermite*, dem Entdecker der réduction continuelle, ist als Satz I S. 312 (dieses Journal Band 47) ausgesprochen, dass, wenn durch die Substitution $S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ die Form f in sich selbst übergeht, die Gleichung $\begin{vmatrix} \alpha - t, & \beta &, \gamma \\ \alpha_1 &, \beta_1 - t, & \gamma_1 \\ \alpha_2 &, \beta_2 &, \gamma_2 - t \end{vmatrix} = 0$ eine Wurzel $t_1 = 1$ besitzt, oder, was dasselbe ist, dass die Summe der Elemente der Hauptdiagonale der gegebenen Matrix $\alpha + \beta_1 + \gamma_2$ gleich ist der analogen aus Elementen der Matrix der adjungirten oder der inversen Substitution gebildeten Summe. Ein einfacher nur durch Druckfehler entstellter Beweis wurde von Hrn. *Cayley* (dieses Journ. Bd. 50 S. 291) gegeben.

Ein anderer Beweis wurde von Hrn. *Bachmann* (dieses Journ. Bd. 76 S. 335) gegeben, ein anderer würde sich auch aus meinen Entwickelungen sehr leicht ableiten lassen. Da nun für jede Wurzel t dieser cubischen Gleichung Verhältnisse zwischen drei zugehörigen Zahlen λ, μ, ν angegeben werden können, welche identisch $\lambda x + \mu y + \nu z = t(\lambda x' + \mu y' + \nu z')$ machen, so müssen, wie Satz II von *Hermite* besagt, wenn $S^n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ und n die kleinste Zahl von dieser Eigenschaft ist, die zwei anderen zu einander reciprocen Wurzeln t_2 und t_3 der cubischen Gleichung primitive $n$te Wurzeln der Einheit sein. Als Werth von n ist jedoch auch 6 möglich, wie meine Entwickelung S. 190 und das S. 220 besprochene Beispiel der Form $\begin{pmatrix} 3, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ zeigt. Dass keine anderen Werthe von n als die 1, 2, 3, 4, 6 möglich sind, kann man auch ohne meine Entwickelungen dadurch erkennen, dass, während nach der Gleichung $t^2 + (1 - \alpha - \beta_1 - \gamma_2)t + 1 = 0$, die für t_2 und t_3 gilt, die Werthe $-1, 0, 1, 2, 3$ von $\alpha + \beta_1 + \gamma_2$ für t_2 und t_3 bezüglich primitive 2te, 3te, 4te, 6te, 1te Wurzeln der Einheit geben, bei allen anderen ganzen Werthen dieser Summe t_2 und t_3 reell und auch von ± 1 verschieden werden. Es war offenbar Hrn. *Hermites* Absicht, diese zu den verschiedenen Zahlen n gehörigen Substitutionen, welche das Analogon sind zu den bei den transformations semblables der in lineare Factoren zerlegbaren Formen, oder, was dasselbe ist, bei den complexen Einheiten vorkommenden einfachen Einheitswurzeln, von seinen übrigen Untersuchungen auszuschliessen. Denn im Falle $n = 2$, also $t_2 = t_3 = -1$, auf welchen auch die von Hrn. *Cayley* a. a. O. S. 293 gegebene Formel nicht anzuwenden ist, da in diesem die dort mit B und C bezeichneten Coefficienten auch von Null verschieden bleiben können, würden die Gleichungen (5.) S. 309 (dieses Journal Band 47) nicht die allgemeinsten der Gleichung (4.) genügenden sein, weil dann die Determinante des Coefficientensystems, mittels dessen nach meiner Bezeichnung $x + x', y + y', z + z'$ durch x', y', z' ausgedrückt werden, gleich Null ist, dann würde auch der Satz S. 324 nicht gelten, dass nicht $T \cdot U = U \cdot T$ sein könne, ohne dass beide Substitutionen Potenzen ein und derselben Substitution sind, und für $n = 3, 4, 6$ lassen sich zwar die sonst gültigen Formeln anwenden, es kann aber bei den dann

complexen Werthen von t_1 und t_2 nach den S. 318 von Hrn. *Hermite* für dieselben gegebenen Ausdrücken die dort mit γ bezeichnete, bei mir mit $-F(\lambda, \mu, \nu)$ zu bezeichnende Grösse nicht positiv sein, wie auch Herr *Hermite* selbst S. 311 als die Eigenthümlichkeit eines negativen Werthes von γ, dort $\mathfrak{A}$, angiebt, dass bei ihm die Substitution oder, wie ich der Deutlichkeit wegen hinzufügen möchte, eine Potenz derselben identisch ist. Die *Hermite*schen Formeln kommen im Wesentlichen zurück auf die auch bei nichtreducirten Formen nicht wesentlich zu modificirenden oben S. 197 betrachteten Wiederholungen des numerischen Werthes von a in Gebieten von nach meiner Bezeichnung negativen Coefficienten A. Sie geben auf die leichteste Weise die einzelnen substitutions semblables. Nur um die Gesammtheit derselben und ihre gegenseitige Abhängigkeit zu erkennen, ist die Betrachtung der Gebiete positiver Coefficienten A und a nützlich wegen ihrer Eigenschaft sich gegenseitig auszuschliessen.

Die Grösse $\alpha + \beta_1 + \gamma_2$ hat die Eigenschaft, wenn $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ eine zusammengesetzte Substitution ist, und die Reihenfolge der Componenten derselben geändert wird, ungeändert zu bleiben, da sie sich als $\Sigma_\varrho \Sigma_\sigma p_{\varrho\sigma} \cdot q_{\sigma\varrho}$ darstellt, wenn $p_{\varrho\sigma}$ und $q_{\varrho\sigma}$ die Elemente der Componenten sind. Diese Grösse oder eine geeignete Function derselben, z. B. $\frac{\alpha + \beta_1 + \gamma_2 - 1}{2}$ oder den Modulus oder den reellen Theil des Logarithmus einer der beiden Wurzeln der Gleichung $t^2 - (\alpha + \beta_1 + \gamma_2 - 1)\,t + 1 = 0$ kann man deshalb in gewisser Weise als Mass für den Rang einer Substitution ansehen, was besonders einfach und sachgemäss bei Ausschluss der mehrbesprochenen wie Ausnahmen anzusehenden Substitutionen wird, für welche $n = 2, 3, 4, 6$ ist. Nach dem oben angeführten Satze besteht je nach der Wahl dieses Masses zwischen dem Range einer Substitution und dem ihrer inversen oder adjungirten Gleichheit oder eine andere einfache Beziehung. Die Aufgabe, alle Substitutionen, durch welche f in sich selbst übergeht, durch einige von einander unabhängige vom absolut kleinsten Range auszudrücken, welche der Zurückführung aller ähnlichen Substitutionen bei binären Formen auf die einer einfachen Periode oder der kleinsten Lösung der *Pell*schen Gleichung entsprechende analog ist, ist offenbar im Obigen bereits gelöst.

f) **Die Formen, durch welche sich die Null rational darstellen lässt.**

Bei diesen Formen, von welchen ich den Fall $I=0$ zunächst noch ausschliesse, bleibt die Definition reducirter Formen und die Eintheilung in Felder und Gebiete bestehen. Nur kommen, wenn unter den Zahlen a, b, c, d selbst die Null vorkommt, zu den S. 190 besprochenen Werthen von λ und den entsprechenden Substitutionen noch weitere hinzu, indem dann von den Zahlen g, h, k, l, m, n vier $=0$ werden können, und können die Felder reducirter solcher Formen ins Unendliche reichen. Ich will hier keine besonderen Entwickelungen mehr machen, sondern nur die völlig ausreichenden allgemeinen Principien unmittelbar, zunächst auf das im *Gauss*ischen Nachlass (Werke Band II. S. 311) behandelte Beispiel der Form $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $=f$ anwenden, das einzige mir bekannt gewordene, bisher von irgend Jemand behandelte Beispiel einer indifferenten ternären Form. Dasselbe ist so einfach, dass sich die nach meinem früher benützten Princip zu stellende Zeichnung auf die Hälfte eines einzigen Feldes beschränken würde. Denn das Feld der durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ aus f hervorgehenden Form $f_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ & & & 0 \end{vmatrix}$ ist zu sich selbst symmetrisch entsprechend der Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ und der Axe $\eta=\zeta$, und ist durch jede seiner drei Grenzlinien, von welchen nur eine in ihrem ganzen und eine in ihrem halben Verlauf zu betrachten ist, von einem ihm symmetrischen Feld getrennt, nämlich zunächst durch das von $\zeta=0$ bis $\zeta=+\infty$ reichende Stück der Linie $\eta=0$ von dem Feld der mit ihr numerisch übereinstimmenden durch die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ aus ihr hervorgehenden Form. Längs dem von $\eta=0$, $\zeta=+\infty$ bis $\eta=\zeta=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ reichenden Stück der Linie $2\eta\zeta=1$ ist nach (11.), und da ξ, η, ζ positiv sind, $\eta+\zeta=\xi$. Setzt man dem Ueberschreiten der Grenzlinie entsprechend $\eta+\zeta=\xi+\delta$, so ist

$2\eta\zeta = 1 + 2\xi\delta + \delta^2$, $\mathfrak{h}_1 = 2\eta(\xi - \eta) - 1 = 2(\xi - \eta)\delta + \delta^2$, $\mathfrak{l}_1 = -\delta^2$, $\mathfrak{m}_1 = 2(\xi - \zeta)\delta + \delta^2$. Um diesen bei den früher behandelten Formen nicht möglich gewesenen Fall zu behandeln, hat man nach Vorschrift von S. 168 zunächst die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, in welcher nur die Reihenfolge der Verticallinien willkürlich ist, anzuwenden, welche an Stelle der Summe $-\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{h}_1 - \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{l}_1 - \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{n}_1$ eine um $\mathfrak{h}_1$, die grösste der Zahlen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1$, kleinere bringt, und dann, weil der an Stelle von $\mathfrak{k}_1$ tretende Coefficient allein positiv wird, die Substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, also im Ganzen auf f_1 die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Da in der entstehenden Form, die ich f_2 nenne, $\mathfrak{g}_2 = -\delta^2$, $\mathfrak{h}_2 = 2(\xi - \zeta)\delta$, $\mathfrak{k}_2 = -2(\xi - \eta)\delta$ ist, woraus zu erkennen ist, dass ihr Feld in die Linie $2\eta\zeta = 1$ degenerirt, hätte man noch weitere Substitutionen anzuwenden, zunächst wieder eine, welche $\mathfrak{h}_2$ in $-\mathfrak{h}_2$ verwandelt, man sieht jedoch voraus, dass man im vorliegenden Falle eines positiven Werthes von δ, wenn man erst die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ vorausgeschickt hat, dieselbe Substitution zur weiteren Reduction anwenden kann, welche im Falle eines negativen Werthes von δ die Form f_2 in die f_1 verwandelt hätte, nämlich die zur oben angegebenen inverse $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, welche, da die Form $f_2 = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ numerisch nicht geändert worden ist, eine mit der Form f_1 numerisch übereinstimmende Form hervorbringt, welche also aus ihr durch die Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ hervorgeht. Aus den gefundenen drei sich selbst reciprocen Substitutionen sind alle Substitutionen zu bilden, durch welche f_1 in sich selbst übergeht. Lässt man ihnen die Sub-

stitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ vorausgehen und die inverse folgen, so erhält man die Substitutionen $S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $T = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $U = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, durch die sich alle Substitutionen bilden lassen, durch welche die Form $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ in sich selbst übergeht. Der allgemeine Ausdruck dieser Substitutionen lässt sich in eine Gestalt bringen, dass er jede nur einmal giebt, mittels der für die drei erstgenannten und ebenso für die Substitutionen S, T, U geltenden Relationen $S \cdot U = U \cdot S$, $S\,T\,S\,T = T\,S\,T\,S$, welche aus der vier- und achttheiligen Symmetrie hervorgehen, die an den zwei im Endlichen gelegenen Durchschnittspunkten der betrachteten drei Symmetrieaxen stattfindet. Die Symmetrie an dem dritten im Unendlichen gelegenen Punkt ist eine unendlichtheilige. Dass das von *Gauss* gegebene Coefficientensystem

$$W = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2), & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2), & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2), & \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2), & \alpha\gamma - \beta\delta \\ \alpha\beta + \gamma\delta \quad , & \alpha\beta - \gamma\delta \quad , & \alpha\delta + \beta\gamma \end{vmatrix},$$

i welchem $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$ ist und entweder zwei der Zahlen α, β, γ, δ ganz und grade, zwei ganz und ungerade sind, oder alle vier ungerade Multipla von $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ sind, in der That die Transformationen der Form $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ in sich selb; giebt, natürlich mit Ausschluss derjenigen leicht aus den anderen abzuleinden, welche einen negativen ersten Coefficienten haben, folgt daraus, dass ınächst, wenn man für $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ die Zahlen $\begin{vmatrix} 1 & \pm 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ oder $\begin{vmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \mp\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$ setzt, as Coefficientensystem mit dem der Substitution $(S\,T\,S\,U)^{\pm 1} = \begin{vmatrix} 3 & & \pm 2 \\ -2 & - & \mp 2 \\ \pm 2 & \pm 2 & 1 \end{vmatrix}$ oder $(S\,T)^{\pm 1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \mp 1 & 0 \end{vmatrix}$ übereinstimmt, während, wenn man α m δ, β mit γ vertauscht, aus W das System $T \cdot W \cdot T$ hervorgeht, welcr Relation man eine Reihe ähnlicher auf Vorzeichenänderungen und ander Vertauschungen unter α, β, γ, δ gegründeter an die Seite

Fällen wird also die reducirte indifferente Form f eine binäre Form und zwar eine indifferente oder eine negative, sodass f selbst eine indifferente oder eine nicht positive Form zu nennen ist. Denn bezeichnet man f mit (b, g, c), so könnten, wenn (b, g, c) eine positive binäre Form wäre, die Reductionsbedingungen durch keine positive Form $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ erfüllt werden.

Würzburg, Juni u. December 1873.

Druckfehler:

Seite 189 Zeile 16 soll die erste Substitution heissen: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Seite 197 Zeile 9 von unten ist das s im Nenner überflüssig.

Die *Steiner*sche Auflösung der *Malfatti*schen Aufgabe.

(Von Herrn *H. Schröter* in Breslau.)

Die Aufgabe: „*In ein gegebenes Dreieck drei solche Kreise hineinzulegen, dass jeder derselben die beiden andern und zwei Dreiecksseiten gleichzeitig berührt,*“ scheint zuerst von *Jacob Bernoulli* [1]) für den besonderen Fall eines gleichschenkligen Dreiecks gelöst zu sein. Ihren Namen führt sie nach dem italienischen Mathematiker *Malfatti* [2]), welcher im Jahre 1803 eine Auflösung des allgemeinen Falles gab, indem er für die Radien der gesuchten Kreise verhältnissmässig einfache Ausdrücke aufstellte und dieselben construirte. In den *Gergonne*schen Annalen [3]) als Problem vorgelegt fand sie eine Auflösung durch die Redacteure selbst [4]), deren Ausdrücke für die Radien aus umständlichen algebraischen Rechnungen hervorgingen und weniger einfach waren, als die *Malfatti*schen. An demselben Orte finden sich auch damit zusammenhängende Berechnungen von *Tédenat* [5]) und *Bidone* [6]). Eine neue durch Einführung trigonometrischer Grössen vereinfachte Lösung gab *Lehmus* [7]), der sich ähnliche mit mehr oder minder Eleganz ausgeführte Rechnungen von *Crelle* [8]) und *Grunert* [9]) anschlossen.

Eine neue Epoche in der Geschichte dieses Problems trat ein, als

---

[1]) *Jacques Bernoulli*, Oeuvres complètes, Genève 1744, tome I., p. 303.

[2]) Mem. di Matematica e di Fisica della S. I. delle scienze, Modena 1803, tomo X parte I., pag. 235.

[3]) Annales de mathématiques pures et appliquées par *I. D. Gergonne* et *Th. Lavernède*, tome I., p. 196. 1810 et 1811.

[4]) Ann. de math. t. I p. 343, t. II p. 60.

[5]) Ann. de math. t. II p. 165.

[6]) Ann. de math. t. II p. 374.

[7]) Ann. de math. t. X p. 289 und Anhang zu *Lehmus'* Lehrbuch der Geometrie, Berlin 1820.

[8]) *Crelle*, Sammlung mathematischer Aufsätze Bd. I, Seite 188.

[9]) *Grunert*, Supplementband zu *Klügels* Wörterbuch Art. „Anwendung der Analysis“.

Steiner [1]) 1826 eine rein geometrische Lösung und eine Verallgemeinerung der *Malfatti*schen Aufgabe mittheilte. Diese bewundernswürdige, durch ihre ausserordentliche Einfachheit alle früheren Auflösungen bei Weitem übertreffende Construction gab er jedoch ohne Beweis, und ein solcher schien lange der Anstrengung der Geometer zu spotten, denn die von *Zornow* [2]) gegebene Verification der *Steiner*schen Construction, deren Kern eine aus metrischen Beziehungen und algebraischen Umformungen hervorgegangene Gleichung ist, entspricht nicht dem Sinne der reinen Geometrie und noch weniger der Einfachheit der Construction selbst. Auch die im Wesentlichen mit der *Zornow*schen übereinstimmende Darstellung von *Adams* [3]) stützt sich zumeist auf Rechnung.

Die *Steiner*sche Verallgemeinerung des Problems wurde für eine Reihe von Analytikern der Ausgangspunkt neuer Untersuchungen, welche sich bis in die neueste Zeit erstrecken; man sehe die Arbeiten von *Schellbach* [4]), *Cayley* [5]), *Clebsch* [6]), *Mertens* [7]) u. A. Aber eine rein-geometrische Herleitung der *Steiner*schen Auflösung ist, soviel ich weiss, nur zwei Mal versucht worden. Der erste Versuch dieser Art rührt von *Plücker* [8]) her, welcher sich in zwei Arbeiten mit diesem Gegenstande beschäftigt. Doch gelingt es ihm nur, den einen Theil der Construction auf synthetischem Wege nachzuweisen; der andere Theil wird in einer Note durch algebraisch-analytische Rechnungen erhärtet, welche in gar keinem inneren Zusammenhange mit den Betrachtungen des Textes stehen, so dass er selbst einen „einfachen rein-geometrischen Beweis für wünschenswerth“ erklärt. Eine wirklich rein-geometrische Ableitung der *Steiner*schen Construction für das *Malfatti*sche Problem hat *Andrew S. Hart* [9]) gegeben, der indessen seine

---

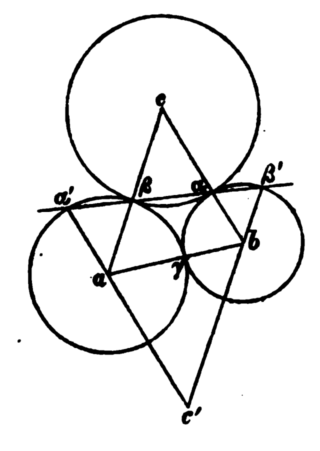
[1]) *Steiner*, „Einige geometrische Betrachtungen“, *Crelle*s Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. I S. 178.
[2]) *Crelle*s Journal Bd. X, S. 300.
[3]) *Adams*, das *Malfatti*sche Problem, Winterthur 1846.
[4]) *Crelle*s Journal, Bd. 45, S. 91 u. 186.
[5]) Cambr. and Dubl. math. Journal t. IV p. 270.
Quarterly Journal vol. I, p. 222.
Analytical Researches, connected with *Steiner*'s Extension of *Malfatti*'s problem by *A. Cayley*, London Academy 1852.
[6]) *Crelle-Borchardt*sches Journal Bd. 53, S. 292.
[7]) *Crelle-Borchardt*sches Journal Bd. 76, S. 92.
[8]) *Crelle*s Journal Bd. XI, S. 117 u. 356.
[9]) Quarterly Journal of mathematics vol. I, p. 219.

Herleitung selbst „a tolerable easy proof of the truth of his result" nennt; und in der That erscheint sie mehr als eine auf die *Steiner*sche Construction angepasste Verification, indem sie sich nicht auf die in der *Steiner*schen Abhandlung aufgestellten Sätze aus der Kreistheorie, sondern vielmehr auf einige ad hoc vorausgeschickte Lemmen stützt. *Steiner* leitet aber seine Construction mit folgenden Worten ein: „Um die Fruchtbarkeit der in den Paragraphen (I, II, III) aufgestellten Sätze an einem dazu geeigneten Beispiele zu zeigen, fügen wir die geometrische Lösung und zugleich die Verallgemeinerung der *Malfatti*schen Aufgabe, jedoch ohne Beweis, hinzu". Wenn nun hierzu *Plücker* bemerkt: „Diese Worte könnten demjenigen, der, wie ich von mir bekennen muss, keine Idee davon hat, wie die Construction jener Aufgabe, dem Wesentlichen nach, auf den in den angeführten Paragraphen entwickelten bekannten Sätzen über Chordalen, zugeordnete Pole und Aehnlichkeitspunkte beruhen möge, den Gedanken aufdrängen, dass die gegebene Construction nicht bewiesen sei", wenn derselbe kurz vorher sagt: „Um bis dahin meinerseits den Schein zu vermeiden, irgend eine Behauptung unbewiesen gewagt zu haben, füge ich in dieser Note den obigen Beweis hinzu" — so liegt hierin nicht blos eine Entschuldigung seiner schwerfälligen algebraischen Entwickelung, sondern auch ein Zweifel, ob wirklich die *Steiner*sche Construction aus dessen vorausgeschickter Kreistheorie entspringe.

Die folgende Mittheilung ist bestimmt, diesen Zweifel zu beseitigen und darzuthun, wie allein aus jenen elementaren Betrachtungen der *Steiner*schen Abhandlung und ohne alle weiteren Hülfsmittel naturgemäss und einfach die *Steiner*sche Construction der *Malfatti*schen Aufgabe, sowie die Verallgemeinerung derselben ohne jede Rechnung hervorgeht. Möge noch die ausführliche und für den Leser bequeme Darstellung, welcher leicht hätte eine knappere Form gegeben werden können, aus dem Grunde Entschuldigung finden, weil es wünschenswerth erschien, nicht blos dem gewandten Synthetiker, sondern auch dem Anfänger, welcher nur die *Steiner*sche Abhandlung studirt hat, ein leichtes Verständniss zu bereiten.

Nachtrag. Als die nachfolgende Arbeit bereits in den Händen der Redaction dieses Journals sich befand, wurden dem Verfasser durch das inzwischen erschienene vierte Heft des VI. Bandes von *C. Neumanns*

Mathematischen Annalen zwei neue Behandlungen des *Malfatti*schen Problems bekannt, welche ebenfalls rein-geometrischer Natur sind und auf die *Steiner*sche Construction führen. Die erste derselben von Herrn *Affolter* [1]) behandelt vorzugsweise die erweiterte Aufgabe für ein Kreisdreieck und geht von eigenthümlichen Hülfssätzen aus, welche wesentlich abweichen von den in der *Steiner*schen Abhandlung zu Grunde gelegten Principien der Kreistheorie. Die zweite, auf welche die Redaction der Mathematischen Annalen aufmerksam macht, von Herrn *Binder* [2]) gelangt durch eine längere Reihe von einfacheren Problemen schliesslich zur *Steiner*schen Construction des *Malfatti*schen Problems; auch diese Behandlung ist von der in den nachfolgenden Blättern gegebenen gänzlich verschieden. Sie erstreckt sich ausserdem in schulgerechter Form auf eine genaue Discussion aller möglichen verschiedenen Fälle der Auflösung und enthält eine Menge literarischer Notizen und kritischer Bemerkungen von Interesse. Trotz dieser neueren Publicationen glaubt der Verfasser seine Behandlung des Problems nicht unterdrücken zu sollen, hält es aber für seine Pflicht, den obigen Literatur-Nachweis durch die Anführung derselben zu vervollständigen.



1. Wenn sich drei Kreise (a) (b) (c) paarweise ausschliessend berühren:

(b) und (c) im Punkte α
(c) „ (a) „ „ β
(a) „ (b) „ „ γ

und man verbindet die Berührungspunkte $\alpha\beta$ durch eine Sehne, welche die Kreise (a) und (b) ausserdem noch in α' und β' trifft, dann sind die vier Punkte $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$, welche auf einem durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise (a) und (b) gehenden Aehnlichkeitsstrahl liegen, nicht nur paarweise „potenzhaltend“, nämlich α und β, ebenso α' und β', sondern auch

---

1) Mathematische Annalen von *C. Neumann* Bd. VI S. 597.
2) Das *Malfatti*sche Problem von Prof. *Binder*, Tübingen 1868.

paarweise „ähnlich liegend", nämlich α und α', ebenso β und β'; es sind daher die Radien $a\alpha'$ und $b\alpha$ parallel, ebenso $a\beta$ und $b\beta'$ parallel; schneiden sich daher die Radien $a\alpha'$ und $b\beta'$ in c', so ist c' der Mittelpunkt eines neuen Kreises, welcher (a) und (b) gleichartig in den potenzhaltenden Punkten α' und β' berührt, also $c'\alpha' = c'\beta' =$ dem Radius dieses neuen Kreises (c'); da aber $cac'b$ ein Parallelogramm ist, also bc' gleich der Summe der Radien der Kreise (a) und (c), ferner $b\beta'$ der Radius des Kreises (b), so ist $\beta'c'$, der Radius des neuen Kreises (c'), gleich der Summe der Radien der drei gegebenen Kreise. Ebenso folgt, wenn wir $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ an die Stelle von $\alpha\beta$ treten lassen, dass wir zwei neue Kreise (a') und (b') erhalten und dass alle drei denselben Radius haben. Wir erhalten daher folgenden neuen elementaren Satz:

Wenn sich drei Kreise $(a)(b)(c)$ paarweise ausschliessend berühren:

(b) und (c) im Punkte α
(c) „ (a) „ „ β
(a) „ (b) „ „ γ

und man zieht die Secanten:

$$\alpha\beta \qquad \alpha\gamma \qquad \beta\gamma,$$

welche den Kreisen ausserdem in den Paaren von Punkten:

$$\alpha'\beta' \qquad \alpha''\gamma'' \qquad \beta'''\gamma'''$$

begegnen, so giebt es drei neue Kreise, welche die gegebenen paarweise in den drei letzten Punktenpaaren berühren. Diese drei neuen Kreise sind gleich gross und haben zum Radius die Summe der Radien der drei gegebenen Kreise.

Den soeben erhaltenen Satz verallgemeinern wir vermittelst des Princips der Transformation durch reciproke Radien *). Dieses bekannte in neuerer Zeit so vielfach und mit so grossem Erfolge angewendete Princip wurzelt in den elementaren Eigenschaften der „potenzhaltenden Punkte", der „gemeinschaftlichen Potenz zweier Kreise" u. s. w., welche *Steiner* in der oben citirten Abhandlung auseinandergesetzt hat, und ist durchaus nichts anderes, als die erweiterte Auffassung jener Kreiseigenschaften. Wir überschreiten daher durch Anwendung dieses Princips keineswegs das Gebiet

---

*) Siehe u. A. *Geiser*, Einleitung in die synthetische Geometrie, Leipzig 1869 S. 159 oder *Paul Serret*, Des méthodes en géométrie, Paris 1855, p. 21.

der Betrachtungen, aus welchen *Steiner* seine Auflösung der *Malfatti*schen Aufgabe abgeleitet wissen wollte. Bei der Transformation durch das Princip der reciproken Radien gehen nun bekanntlich Kreise wieder in Kreise über, gerade Linien in solche Kreise, die durch das Transformationscentrum laufen; der Winkel, unter welchem zwei Kreise sich schneiden, wird gleich dem Winkel, unter welchem die transformirten Kreise sich schneiden; also sich berührende Kreise gehen wieder in sich berührende, sich rechtwinklig-schneidende in neue sich rechtwinklig-schneidende über; da endlich alle Kreise, welche zwei gegebene gleichartig berühren, von dem „äusseren Potenzkreise" der letzteren rechtwinklig geschnitten werden, so muss der äussere Potenzkreis zweier Kreise durch die Transformation wieder in den äusseren Potenzkreis der beiden transformirten Kreise übergehen u. s. w.

Transformiren wir nun den vorigen Satz durch das Princip der reciproken Radien in Bezug auf irgend ein Transformationscentrum x, so gehen die drei sich berührenden Kreise in drei andere sich berührende Kreise über, die geraden Linien aber, welche als Secanten auftraten, in Kreise, welche durch das Transformationscentrum x gehen; für zwei gleiche Kreise liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt im Unendlichen; der äussere Potenzkreis wird daher eine gerade Linie und zwar, wie unmittelbar einleuchtet, die Linie der gleichen Potenzen (reelle oder ideelle gemeinschaftliche Secante) der beiden gleichen Kreise; da nun bei der angewendeten Transformation der äussere Potenzkreis wieder in den äusseren Potenzkreis und eine gerade Linie in einen durch das Transformationscentrum gehenden Kreis übergeht, so wird der vorige Satz transformirt so lauten:

Wenn sich drei Kreise (a) (b) (c) *paarweise ausschliessend berühren:*

(b) *und* (c) *in* α
(c) „ (a) „ β
(a) „ (b) „ γ

und man legt durch $\alpha\beta$ *irgend einen Kreis, welcher* (a) *und* (b) *ausserdem in den Punkten* α' *und* β' *trifft, durch* $\alpha\gamma$ *irgend einen Kreis, welcher* (a) *und* (c) *ausserdem in* α'' *und* γ'' *trifft, dann giebt es allemal einen Kreis* (c_1), *welcher in* α' *und* β' *die Kreise* (a) *und* (b) *gleichartig berührt; es giebt ferner einen Kreis* (b_1), *welcher die Kreise* (a) *und* (c) *in* α'' *und* γ'' *gleichartig berührt;*

der äussere Potenzkreis der beiden Kreise (b_1) *und* (c_1) *geht dann nothwendig durch den andern Schnittpunkt* x *der beiden durch*

$$\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta' \text{ und } \alpha\,\gamma\,\alpha''\,\gamma''$$

gelegten Kreise.

Dieser Satz lässt sich auch so aussprechen:

Wenn sich drei Kreise (a) (b) (c) *paarweise ausschliessend berühren:*

(b) *und* (c) *in* α
(c) „ (a) „ β
(a) „ (b) „ γ

und man legt irgend einen Kreis (c_1) *an* (a) *und* (b) *gleichartig berührend in den Punkten* α' *und* β', *irgend einen Kreis* (b_1) *an* (a) *und* (c) *gleichartig berührend in den beiden Punkten* α'' *und* γ'', *dann liegen sowohl die vier Punkte* $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$ *als auch die vier Punkte* $\alpha\,\gamma\,\alpha''\,\gamma''$ *auf je einem Kreise; diese beiden Kreise haben ausser* α *noch einen gemeinschaftlichen Punkt* x *und dieser liegt allemal auf dem äusseren Potenzkreise von* (b_1) *und* (c_1).

Durch wiederholte Transformation bleibt dieser Satz ungeändert; man kann aber leicht die Transformation so einrichten, dass aus den Kreisen (b_1) und (c_1) zwei gerade Linien werden, welche dann äussere gemeinschaftliche Tangenten für die Kreispaare (a) und (c), (a) und (b) sein müssen. Dieser besondere Fall wird dadurch erreicht, dass man einen Schnittpunkt der Kreise (b_1) und (c_1) als neues Transformationscentrum wählt, und es lassen sich immer solche Kreise (b_1) und (c_1) ausfindig machen, welche reelle Schnittpunkte haben. Da nun für zwei in gerade Linien ausartende Kreise offenbar der Potenzkreis, welcher alle Berührungskreise rechtwinklig schneidet, nichts anderes als eine Halbirungslinie ihres Winkels ist, so wird der besondere Fall des vorigen Satzes also lauten:

Wenn sich drei Kreise (a) (b) (c) *paarweise ausschliessend berühren:*

(b) *und* (c) *in* α
(c) „ (a) „ β
(a) „ (b) „ γ

und man zieht eine äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise (a) *und* (b), *welche dieselben in* α' *und* β' *berührt, eine äussere gemeinschaftliche*

Tangente der Kreise (a) und (c), welche dieselben in α'' und γ'' berührt, so liegen allemal

die vier Punkte $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$ auf einem Kreise (c_1)
" " " $\alpha\,\gamma\,\alpha''\,\gamma''$ " " " (b_1);

die beiden Kreise (b_1) und (c_1) haben ausser dem Punkte α noch einen gemeinschaftlichen Punkt x; dieser Punkt x liegt nothwendig auf einer Halbirungslinie des Winkels, den die beiden äusseren gemeinschaftlichen Tangenten $\alpha'\beta'$ und $\alpha''\gamma''$ mit einander bilden.

Es ist möglich, dass dieser Satz, welcher für die Lösung der *Malfatti*schen Aufgabe von der grössten Bedeutung ist, sich noch einfacher und unmittelbarer einsehen lässt; schwerlich dürfte aber der vorige allgemeinere Satz, von welchem dieser ein besonderer Fall ist, einfacher zu beweisen sein.

2. Wir vervollständigen nun die zuletzt betrachtete Figur und untersuchen ihre weiteren Beziehungen:

Es berühren sich also paarweise ausschliessend

die Kreise (b) und (c) in α
" " (c) " (a) " β
" " (a) " (b) " γ;

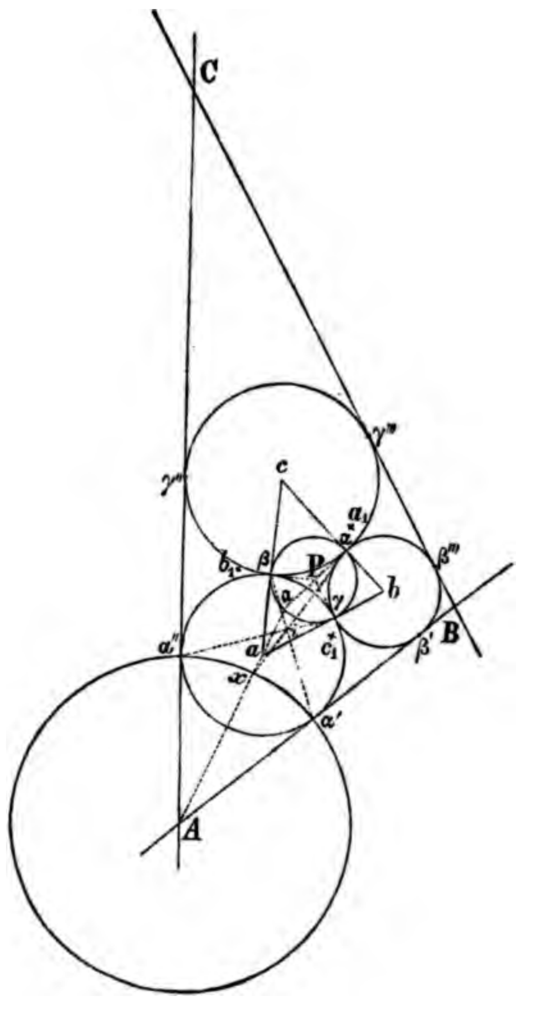
eine äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise (a) und (b) berührt dieselben in α' und β', und um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wählen wir von den beiden äusseren gemeinschaftlichen Tangenten diejenige, welche alle drei Kreise (a) (b) (c) in derselben Halbebene von sich hat; ebenso berührt eine äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise (a) und (c) dieselben in α'' und γ'', und wir wählen wiederum von den beiden äusseren gemeinschaftlichen Tangenten diejenige, welche alle drei Kreise in derselben Halbebene von sich hat; endlich berührt eine äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise (b) und (c) dieselben in β''' und γ''', wo auch von den beiden äusseren gemeinschaftlichen Tangenten diejenige gewählt ist, welche die drei Kreise (a) (b) (c) auf derselben Seite von sich hat, so dass also die drei Geraden $\alpha'\beta'$ $\alpha''\gamma''$ $\beta'''\gamma'''$ ein Dreieck ABC bilden:

$$(\alpha'\beta',\ \alpha''\gamma'') = A$$
$$(\beta'\alpha',\ \beta'''\gamma''') = B$$
$$(\gamma''\alpha'',\ \gamma'''\beta''') = C,$$

dessen innerer Raum die drei Kreise (a) (b) (c) enthält; alsdann werden die vier Punkte

$$\begin{array}{llll} \alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta' & \text{auf einem Kreise} & (c_1) \\ \alpha\ \gamma\ \alpha''\ \gamma'' & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & (b_1) \\ \beta\ \gamma\ \beta'''\ \gamma''' & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & (a_1) \end{array}$$

liegen, und die beiden Kreise (b_1) und (c_1) werden ausser dem Punkte α einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt x haben, welcher auf der Halbirungslinie des inneren Dreieckswinkels A liegen muss; dasselbe findet bei den beiden anderen Ecken des Dreiecks statt.



Legen wir nun durch die drei Berührungspunkte $\alpha\ \beta\ \gamma$ einen Kreis (P), dessen Mittelpunkt der Punkt der gleichen Potenzen für die drei gegebenen Kreise (a) (b) (c) ist und der die Seiten des Dreiecks $a\,b\,c$ in den Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma$ berührt, also die drei Kreise (a) (b) (c) gleichzeitig rechtwinklig schneidet; denken wir uns ferner um A als Mittelpunkt einen Kreis (A) beschrieben mit dem Radius

$$A\alpha' = A\alpha'',$$

so wird offenbar der Kreis (a) die Kreise (A) und (P) gleichzeitig rechtwinklig schneiden, und zwar den ersten in den Punkten $\alpha'\,\alpha''$, den andern in den Punkten $\beta\,\gamma$; hieraus folgt, dass die Schnittpunkte

$$(\beta\alpha',\ \gamma\alpha'') \text{ und } (\beta\alpha'',\ \gamma\alpha')$$

die beiden Aehnlichkeitspunkte der Kreise (A) und (P) sein müssen *); wir fassen nur den einen derselben auf,

$$(\beta\alpha', \gamma\alpha'') = i,$$

welcher als innerer Aehnlichkeitspunkt auftritt. Die „gemeinschaftliche innere Potenz" dieser beiden Kreise ist also das Rechteck

$$i\beta \cdot i\alpha' = i\gamma \cdot i\alpha''$$

und jeder durch i gehende Strahl trifft die beiden Kreise (A) und (P) in zwei Paaren potenzhaltender Punkte, so dass sie in einem solchen Paare allemal von einem neuen Kreise ungleichartig berührt werden.

Anderseits ist $\beta\alpha'$ die gemeinschaftliche Secante der Kreise (a) und (c_1), ebenso $\gamma\alpha''$ die gemeinschaftliche Secante der Kreise (a) und (b_1), folglich wird, da die gemeinschaftlichen Secanten dreier Kreise durch einen Punkt laufen (Punkt der gleichen Potenzen), die gemeinschaftliche Secante der Kreise (b_1) und (c_1) durch i laufen müssen, und da wir oben den andern Schnittpunkt der beiden Kreise (b_1) und (c_1) x genannt haben, so geht αx durch i; die gleiche Potenz von i für die drei Kreise (a) (b_1) (c_1) ist also

$$i\beta \cdot i\alpha' = i\gamma \cdot i\alpha'' = i\alpha \cdot ix;$$

da diese zugleich die gemeinschaftliche innere Potenz der Kreise (A) und (P) ist und α auch auf dem Kreise (P) liegt, so muss x auf dem Kreise (A) liegen und der zu α zugehörige potenzhaltende Punkt in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunkt i sein.

Wir haben hiemit eine zweite Eigenschaft des vorigen Punktes x [des zweiten Schnittpunktes der Kreise (b_1) und (c_1)] gefunden; er liegt nicht nur auf der Halbirungslinie des inneren Dreieckswinkels A, sondern auch auf dem Kreise (A), folglich in der Mitte des Bogens $\alpha'\alpha''$.

Aus dem Umstande, dass x und α potenzhaltende Punkte in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunkt i sind, folgt, dass in diesen Punkten die Kreise (A) und (P) von einem neuen Kreise ungleichartig berührt werden können; ziehen wir also Ax und $P\alpha$, die sich in $\mathfrak{a}$ treffen mögen

$$(Ax, P\alpha) = \mathfrak{a},$$

so muss $\mathfrak{a}x = \mathfrak{a}\alpha$ der Radius eines solchen Berührungskreises sein, also $\mathfrak{a}$ wird von x und α gleich weit abstehen, und da $x\alpha$ die gemeinschaftliche

*) Siehe die oben angeführte Abhandlung von *Steiner:* Dieses Journal Bd. I Seite 174.

Secante der beiden Kreise (b_1) und (c_1) ist, so wird $\mathfrak{a}$ auf der Centrale dieser beiden Kreise liegen müssen. Es liegen aber nicht nur

$$b_1 \quad c_1 \quad \mathfrak{a}$$

auf einer Geraden, sondern es bilden auch $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{a}x$ gleiche Winkel mit $b_1 c_1$, weil die Gerade $\mathfrak{a}\, b_1 c_1$ als Centrale in der Mitte auf der gemeinschaftlichen Secante αx senkrecht steht; es findet also die Gleichheit der Winkel statt.

$$\angle(\mathfrak{a}\alpha,\ b_1 c_1) = \angle(\mathfrak{a}A,\ b_1 c_1).$$

3. Um den Punkt c_1 können wir uns einen neuen mit dem vorigen Kreise (c_1) concentrischen Kreis gelegt denken, welcher die äussere gemeinschaftliche Tangente $\alpha'\beta'$ der Kreise (a) und (b) oder die Dreiecksseite AB berührt; wir bezeichnen diesen neuen Kreis, der mit dem vorigen denselben Mittelpunkt hat, durch

$$((c_1))$$

und legen ebenso um b_1 einen mit dem vorigen Kreise (b_1) concentrischen Kreis

$$((b_1)),$$

welcher die Dreiecksseite AC berührt, endlich um a_1 einen mit dem Kreise (a_1) concentrischen Kreis

$$((a_1)),$$

welcher die Dreiecksseite BC berührt.

Von diesen drei neuen Kreisen $((a_1))$ $((b_1))$ $((c_1))$ sind unmittelbar andere Tangenten zu erkennen.

Weil der Punkt c_1 von α und β' gleich weit absteht und die Tangenten in α und β' an dem Kreise (b) gleiche Winkel bilden mit der Sehne $\alpha\beta'$, so wird der Punkt c_1 auch von der Tangente αP so weit abstehen, wie von der Tangente $\beta'\alpha'$; in gleicher Weise wird, weil c_1 von β und α' gleich weit absteht und die Tangenten in β und α' am Kreise (a) gleiche Winkel bilden mit der Sehne $\beta\alpha'$, der Punkt c_1 von der Tangente βP so weit abstehen wie von der Tangente $\alpha'\beta'$; der Kreis $((c_1))$, welcher $\alpha'\beta'$ berührt, wird also auch die beiden Geraden $P\alpha$ und $P\beta$ berühren, und da rund herum dieselben Verhältnisse eintreten, so sehen wir, dass

der Kreis	$((c_1))$	die Geraden	$P\alpha$, $P\beta$, AB	berührt	
„	„	$((a_1))$ „	„	$P\beta$, $P\gamma$, BC	„
„	„	$((b_1))$ „	„	$P\gamma$, $P\alpha$, CA	„ .

Hieraus folgt, dass die beiden Kreise $((b_1))$ und $((c_1))$ die Gerade $P\alpha$ oder die mit ihr identische $a\alpha$ zu einer gemeinschaftlichen Tangente haben, welche die Centrale b_1c_1 in dem Punkte a trifft; da nun der Winkel zwischen zwei gleichartigen gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise (d. h. zwischen beiden äusseren und zwischen beiden inneren) durch die Centrale halbirt wird, so muss die durch a symmetrisch zu $a\alpha$ gelegte Gerade, d. h. diejenige Gerade, welche mit der Centrale b_1c_1 gleiche Winkel bildet, wie die erste gemeinschaftliche Tangente, nothwendig die andere gleichartige gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise $((b_1))$ und $((c_1))$ sein; dies ist aber nach 2. die Gerade aA; folglich berührt die Gerade aA die Kreise $((b_1))$ und $((c_1))$ gemeinschaftlich, und a ist der innere Aehnlichkeitspunkt derselben.

Aus dem Vorigen wissen wir, dass aA die Halbirungslinie des inneren Dreieckswinkels A im Dreiecke ABC ist, und ein ganz analoges Verhalten natürlich bei den beiden andern Dreiecksecken eintritt; wir erkennen also:

die Halbirungslinie des inneren Dreieckswinkels A als gemeinschaftliche Tangente der Kreise $((b_1))$ und $((c_1))$,

die Halbirungslinie des inneren Dreieckswinkels B als gemeinschaftliche Tangente der Kreise $((c_1))$ und $((a_1))$,

die Halbirungslinie des inneren Dreieckswinkels C als gemeinschaftliche Tangente der Kreise $((a_1))$ und $((b_1))$;

da die drei Halbirungslinien der Innenwinkel des Dreiecks ABC sich bekanntlich in einem Punkte S schneiden, so ist

der Kreis $((a_1))$ dem Dreieck BCS
„ „ $((b_1))$ „ „ CAS
„ „ $((c_1))$ „ „ ABS

einbeschrieben.

Hierdurch ist eine Brücke hergestellt, welche jetzt umgekehrt von dem Dreieck ABC durch die Kreise $((a_1))$ $((b_1))$ $((c_1))$ zu den Kreisen (a) (b) (c) führt, wie wir vorhin von den letzteren ausgehend das Dreieck ABC und die Kreise $((a_1))$ $((b_1))$ $((c_1))$ fanden; denn es sind

$P\alpha$ und SA gleichartige gemeinschaftliche Tangenten der Kreise $((b_1))$ und $((c_1))$,

$P\beta$ und SB gleichartige gemeinschaftliche Tangenten der Kreise $((c_1))$ und $((a_1))$,

$P\gamma$ und SC gleichartige gemeinschaftliche Tangenten der Kreise $((a_1))$ und $((b_1))$

und

der Kreis (a) berührt AB, AC, $P\beta$, $P\gamma$
" " (b) " BC, BA, $P\gamma$, $P\alpha$
" " (c) " CA, CB, $P\alpha$, $P\beta$.

Es ergiebt sich also für

die Malfattische Aufgabe:

In das Innere eines Dreiecks ABC drei solche Kreise (a) (b) (c) hineinzulegen, dass jeder derselben die beiden andern und zwei Dreiecksseiten gleichzeitig berührt

die Auflösung:

Man ziehe die drei Halbirungslinien der Innenwinkel des Dreiecks ABC, welche sich in einem Punkte S schneiden; man lege in das Innere des Dreiecks

BCS den Berührungskreis $((a_1))$
CAS " " $((b_1))$
ABS " " $((c_1))$;

die beiden Kreise $((b_1))$ und $((c_1))$ haben mit der gemeinschaftlichen Tangente AS noch eine gleichartige (symmetrisch liegende) zweite gemeinschaftliche Tangente αP, ebenso die Kreise $((c_1))$ und $((a_1))$ eine zweite mit BS gleichartige gemeinschaftliche Tangente βP und endlich die Kreise $((a_1))$ und $((b_1))$ eine zweite mit CS gleichartige gemeinschaftliche Tangente γP; diese drei letzteren schneiden sich in einem Punkte P; alsdann werden die vier Geraden:

AB, AC, $P\beta$, $P\gamma$ von einem Kreise (a)
BC, BA, $P\gamma$, $P\alpha$ " " " (b)
CA, CB, $P\alpha$, $P\beta$ " " " (c)

berührt, und die drei Kreise (a) (b) (c) sind die gesuchten.

Dies ist die Steinersche Auflösung der *Malfatti*schen Aufgabe.

4. Ich gehe nicht weiter ein auf die Mehrdeutigkeit der Aufgabe, welche Steiner selbst a. a. O. besprochen hat, da bei allen übrigen von

dem hier betrachteten Falle abweichenden Lagenverhältnissen eine geringe Modification der Construction zum Ziele führt. Auch wird sich erkennen lassen, dass vermittelst des Princips der Transformation durch reciproke Radien die von *Steiner* gegebene Verallgemeinerung der Aufgabe analog dem hier behandelten besonderen Fall zur Lösung gelangt. Die Ausdehnung der Aufgabe auf die Kugelfläche geht aus der ebenen Aufgabe hervor vermittelst des Princips der stereographischen Projection, welches weiter nichts ist, als ein specieller Fall des auf den Raum übertragenen Princips der Transformation durch reciproke Radien.

Jedoch möchte ich den Liebhabern rein-geometrischer Forschung auf dem Gebiete der Elementargeometrie eine weiter eingehende Betrachtung der *Malfatti*schen Figur in der Ebene empfehlen, weil dabei noch manche interessante Beziehungen zu Tage treten, auf welche die algebraische Behandlung des Problems nicht so leicht führt. Auch metrische Relationen ergeben sich, die, wie es scheint, noch nicht bemerkt worden sind; z. B. zeigt sich ohne Weiteres, dass die drei Halbirungslinien der inneren Winkel des Dreiecks abc, welche sich in P schneiden, die Punkte $a_1\, b_1\, c_1$ in der Weise enthalten, dass der Abstand $c\,c_1$ das geometrische Mittel aus den beiden anstossenden Seiten ca und cb ist, d. h.

$$cc_1^2 = ca \cdot cb \text{ und ebenso}$$
$$aa_1^2 = ab \cdot ac$$
$$bb_1^2 = bc \cdot ba.$$

Ergänzen wir noch die Figur, indem wir zu dem inneren Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{a}$ der beiden Kreise $((b_1))$ und $((c_1))$ den inneren Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{b}$ der beiden Kreise $((c_1))$ und $((a_1))$ und den inneren Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{c}$ der beiden Kreise $((a_1))$ und $((b_1))$ hinzufügen, so haben wir folgende Dreiecke:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c}, \end{matrix}$$

welche allemal paarweise perspectivisch liegen. Die Projectionscentra dieser paarweise perspectivisch liegenden Dreiecke, sowie die Geraden, auf welchen

die Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen, stehen in eigenthümlicher Beziehung zu einander. Man kann auch noch die Berührungspunkte der drei Kreise $((a_1))$ $((b_1))$ $((c_1))$ mit den Seiten BC, CA, AB, d. h. die Mittelpunkte der Strecken $\beta'''\gamma'''$, $\gamma''\alpha''$, $\alpha'\beta'$ in die Betrachtung hineinziehen und erhält dadurch ein neues Dreieck, dessen Beziehung zu den früheren aufzusuchen ist. Auch die bekannten Focaleigenschaften der Kegelschnitte treten bei dieser Figur auf: Es sind P und S die Brennpunkte eines Kegelschnitts, welcher die Seiten des Dreiecks $a_1\, b_1\, c_1$ in den Punkten $\mathfrak{c}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}$ berührt; es sind P und A die Brennpunkte eines Kegelschnitts, welcher dem Dreiecke $a\, b_1\, c_1$ einbeschrieben ist und ebenso bei den übrigen Ecken des Dreiecks ABC. Die *Malfatti*sche Figur dürfte daher noch eine ergiebige Quelle sein für elementare Aufgaben und Sätze und würdig einer ebenso vielseitigen geometrischen Betrachtung, wie sie dem *Apollonius*schen Berührungsproblem zu Theil geworden ist.

Breslau im October 1873.

Ueber die Determinante mehrerer Functionen einer Variabeln.

(Von Herrn *G. Frobenius.*)

Zur Darstellung des allgemeinen Integrals einer completen linearen Differentialgleichung durch die Integrale der reducirten gebraucht man gewisse aus diesen Integralen und ihren Ableitungen rational gebildeten Ausdrücke, welche als Auflösungen eines Systems linearer Gleichungen die Form von Quotienten zweier Determinanten haben. Diese Ausdrücke sind, wie ich bemerkt habe, zugleich die Multiplicatoren der Differentialgleichung. Da durch diese Beobachtung die Beziehungen zwischen den Integralen und den Multiplicatoren einer linearen Differentialgleichung, welche in der letzten Zeit von den verschiedensten Seiten her die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt haben, ein erhöhtes Interesse gewinnen, so scheint es mir der Mühe werth, dieselben kurz zusammenzustellen. Weil sie aber rein formaler Natur sind, so will ich sie auch, ohne wesentliche Benutzung analytischer Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen, auf rein rechnendem Wege beweisen. Alsdann bilden sie eine Theorie der Determinanten, welche aus λ Functionen einer Veränderlichen und ihren Ableitungen bis zur $(\lambda-1)$ten Ordnung gebildet sind, und welche an merkwürdigen Eigenschaften nicht minder reich sind, als die von *Jacobi* ausführlich behandelten Functionaldeterminanten.

§. 1.

Sind $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ Functionen einer Veränderlichen x, und ist $y_\alpha^{(\beta)}$ die βte Ableitung von y_α, so nenne ich den Ausdruck

$$\Sigma \pm y_1 y_2^{(1)} \cdots y_\lambda^{(\lambda-1)} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot\cdot\, y_\lambda \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ y_1^{(\lambda-1)} & y_2^{(\lambda-1)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix}$$

die Determinante dieser λ Functionen und bezeichne ihn mit $D(y_1, y_2, \cdots y$
Ist y eine Function von x und multiplicirt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdot\cdot 0 \\ y^{(1)} & y & 0 & \cdot\cdot 0 \\ y^{(2)} & 2y^{(1)} & y & \cdot\cdot 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ y^{(\lambda-1)} & (\lambda-1)y^{(\lambda-2)} & \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\,2}y^{(\lambda-3)} & \cdot\cdot y \end{vmatrix} = y^\lambda$$

mit $D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)$, indem man ihre Zeilen mit den Colonnen der letzteren zusammensetzt, so gelangt man zu der Gleichung

$$(1.)\quad D(y_1 y, y_2 y, \cdots y_\lambda y) = y^\lambda D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda).$$

Setzt man insbesondere $y = \frac{1}{y_1}$, so verschwinden in der auf der linken Seite stehenden Determinante die Elemente der ersten Colonne bis auf das erste, welches gleich 1 wird, und daher reducirt sie sich auf die Determinante der $\lambda-1$ Functionen

$$\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} = \frac{D(y_1, y_2)}{y_1^2}, \cdots \frac{d}{dx}\frac{y_\lambda}{y_1} = \frac{D(y_1, y_\lambda)}{y_1^2}.$$

Setzt man also

$$D(y_1, y_2) = y_2', \cdots D(y_1, y_\lambda) = y_\lambda',$$

so ist

$$D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda) = \frac{1}{y_1^{\lambda-2}} D(y_2', y_3', \cdots y_\lambda').$$

Aus dieser Formel ergiebt sich zunächst ein einfacher Beweis für das Theorem:

Wenn mehrere Functionen unter einander unabhängig sind, so ist ihre Determinante von Null verschieden; wenn sie aber nicht unter einander unabhängig sind, so ist ihre Determinante gleich Null.

In diesem Satze sind, wie es in der Theorie der linearen Differentialgleichungen üblich ist, mehrere Functionen unter einander unabhängig genannt, wenn zwischen ihnen keine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Der zweite Theil desselben ist leicht zu beweisen. Um auch den ersten Theil zu begründen, nehmen wir an, es sei für $\lambda-1$ Functionen bewiesen, dass, wenn ihre Determinante verschwindet, zwischen ihnen eine lineare Relation besteht, und zeigen, dass dann für

λ Functionen dasselbe gilt. Da die Richtigkeit der Behauptung für eine Function einleuchtet, so ist sie damit allgemein bewiesen.

Wenn y_1 nicht identisch verschwindet, was einer linearen Relation zwischen $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ gleichkommt, so folgt aus dem Verschwinden der Determinante $D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)$, dass auch $D(y_2', y_3', \cdots y_\lambda') = 0$ ist. Mithin besteht eine Gleichung von der Form

$$c_2 y_2' + c_3 y_3' + \cdots + c_\lambda y_\lambda' = 0.$$

Durch Division mit y_1^2 ergiebt sich daraus

$$c_2 \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} + c_3 \frac{d}{dx}\frac{y_3}{y_1} + \cdots + c_\lambda \frac{d}{dx}\frac{y_\lambda}{y_1} = 0$$

und durch Integration

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_\lambda y_\lambda = 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Aus der Formel

$$D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda) = \frac{1}{y_1^{\lambda-2}} D(y_2', y_3', \cdots y_\lambda')$$

folgt

$$D(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_1} D(y_2', y_3'),\ \ D(y_1, y_2, y_4) = \frac{1}{y_1} D(y_2', y_4'), \cdots$$
$$D(y_1, y_2, y_\lambda) = \frac{1}{y_1} D(y_2', y_\lambda'),$$

ferner

$$D(y_2', y_3', \cdots y_\lambda') = \frac{1}{y_2'^{\lambda-3}} D(D(y_2', y_3'), D(y_2', y_4'), \cdots D(y_2', y_\lambda')).$$

Indem man diese Formeln mit einander combinirt, gelangt man zu der Gleichung

$$D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda) = \frac{1}{D(y_1, y_2)^{\lambda-3}} D(D(y_1, y_2, y_3), D(y_1, y_2, y_4), \cdots D(y_1, y_2, y_\lambda)).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Schlussweise findet man endlich den Satz:

Sind $u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_1, v_2, \cdots v_\nu$ *Functionen von* x *und ist* $w_1 = D(u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_1),\ w_2 = D(u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_2), \cdots w_\nu = D(u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_\nu)$, *so ist*

$$(2.)\quad D(u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_1, v_2, \cdots v_\nu) = \frac{D(w_1, w_2, \ldots w_\nu)}{D(u_1, u_2, \ldots u_\mu)^{\nu-1}}.$$

§. 2.

Ein specieller Fall der eben entwickelten Formel ist die Gleichung

$$D(y_1,\cdots y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1},\cdots y_\lambda, y_\varkappa, y) = \frac{D(D(y_1,..y_{\varkappa-1},y_{\varkappa+1},..y_\lambda,y_\varkappa),\, D(y_1,..y_{\varkappa-1},y_{\varkappa+1},..y_\lambda,y))}{D(y_1,..y_{\varkappa-1},y_{\varkappa+1},..y_\lambda)},$$

welche sich auch in der Form

$$(3.)\quad \frac{D(y_1,\ldots y_{\varkappa-1},y_{\varkappa+1},\ldots y_\lambda)}{D(y_1,y_2,\ldots y_\lambda)}\,\frac{D(y,y_1,\ldots y_\lambda)}{D(y_1,y_2,\ldots y_\lambda)} = -\frac{d}{dx}\,\frac{D(y,y_1,\ldots y_{\varkappa-1},y_{\varkappa+1},\ldots y_\lambda)}{D(y_1,y_2,\ldots y_\lambda)}$$

schreiben lässt. Wir nehmen an, dass die Functionen $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ unter einander unabhängig sind, und setzen zur Abkürzung

$$(4.)\quad z_\varkappa = (-1)^{\lambda+\varkappa}\,\frac{D(y_1,\ldots y_{\varkappa-1},y_{\varkappa+1},\ldots y_\lambda)}{D(y_1,y_2,\ldots y_\lambda)},$$

$$(5.)\quad P(y) = (-1)^\lambda\,\frac{D(y,y_1,\ldots y_\lambda)}{D(y_1,y_2,\ldots y_\lambda)}$$

$$(6.)\quad P(y,z_\varkappa) = (-1)^{\varkappa-1}\,\frac{D(y,y_1,\ldots y_{\varkappa-1},y_{\varkappa+1},\ldots y_\lambda)}{D(y_1,y_2,\ldots y_\lambda)}.$$

Alsdann lautet die Gleichung (3.)

$$(7.)\quad z_\varkappa\, P(y) = \frac{d}{dx}\, P(y, z_\varkappa).$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_\lambda \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots y_\lambda^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ y_1^{(\lambda-2)} & y_2^{(\lambda-2)} & \cdots y_\lambda^{(\lambda-2)} \\ y_1^{(\varkappa)} & y_2^{(\varkappa)} & \cdots y_\lambda^{(\varkappa)} \end{vmatrix}$$

hat, wenn $\varkappa < \lambda-1$ ist, den Werth Null, wenn aber $\varkappa = \lambda-1$ ist, den Werth $D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)$. Indem man dieselbe nach den in der letzten Zeile stehenden Elementen entwickelt, gelangt man zu dem System der Gleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} y_1\, z_1 + y_2\, z_2 + \cdots + y_\lambda\, z_\lambda = 0, \\ y_1^{(1)} z_1 + y_2^{(1)} z_2 + \cdots + y_\lambda^{(1)} z_\lambda = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot, \\ y_1^{(\lambda-2)} z_1 + y_2^{(\lambda-2)} z_2 + \cdots + y_\lambda^{(\lambda-2)} z_\lambda = 0, \\ y_1^{(\lambda-1)} z_1 + y_2^{(\lambda-1)} z_2 + \cdots + y_\lambda^{(\lambda-1)} z_\lambda = 1. \end{cases}$$

Setzt man

$$(9.)\quad s_{\alpha,\beta} = y_1^{(\alpha)} z_1^{(\beta)} + y_2^{(\alpha)} z_2^{(\beta)} + \cdots + y_\lambda^{(\alpha)} z_\lambda^{(\beta)},$$

so kann man dieselben kürzer in der Form

$$s_{0,0}=0,\quad s_{1,0}=0,\cdots\quad s_{\lambda-2,0}=0,\quad s_{\lambda-1,0}=1$$

darstellen. Nun ist aber

$$\frac{d\,s_{\varkappa-1,0}}{dx}=s_{\varkappa,0}+s_{\varkappa-1,1},$$

$$\frac{d^2\,s_{\varkappa-2,0}}{dx^2}=s_{\varkappa,0}+2s_{\varkappa-1,1}+s_{\varkappa-2,2},$$

$$\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot$$

$$\frac{d^{\varkappa}s_{0,0}}{dx^{\varkappa}}=s_{\varkappa,0}+\varkappa s_{\varkappa-1,1}+\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}s_{\varkappa-2,2}+\cdots+s_{0,\varkappa}.$$

Ist $\varkappa<\lambda-1$, so ergiebt sich aus diesen Gleichungen, dass allgemein $s_{\alpha,\beta}=0$ ist, wenn $\alpha+\beta<\lambda-1$ ist. Wenn $\varkappa=\lambda-1$ gesetzt wird, so folgt aus ihnen mit Hülfe der bekannten Identität

$$(1-1)^{\mu}=1-\mu+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\cdots+(-1)^{\mu}=0,$$

dass $s_{\lambda-1,0}, s_{\lambda-2,1},\cdots$ abwechselnd gleich $+1$ und -1 sind. Ist endlich $\varkappa=\lambda$, so schliesst man auf dieselbe Weise, dass $s_{\lambda,0}=-s_{\lambda-1,1}=+s_{\lambda-2,2}=\cdots=(-1)^{\lambda}s_{0,\lambda}$ ist. Es gilt also der Satz:

Der Ausdruck

$$(9.)\qquad s_{\alpha,\beta}=y_1^{(\alpha)}z_1^{(\beta)}+y_2^{(\alpha)}z_2^{(\beta)}+\cdots+y_{\lambda}^{(\alpha)}z_{\lambda}^{(\beta)}$$

ist, wenn $\alpha+\beta<\lambda-1$ *ist, gleich Null, und wenn* $\alpha+\beta=\lambda-1$ *ist, gleich* $(-1)^{\beta}$.

Unter den soeben entwickelten Relationen befinden sich die Gleichungen

$$(10.)\qquad\begin{cases}z_1\,y_1+z_2\,y_2+\cdots+z_{\lambda}\,y_{\lambda}=0,\\ z_1^{(1)}y_1+z_2^{(1)}y_2+\cdots+z_{\lambda}^{(1)}y_{\lambda}=0,\\ \cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\qquad\cdot,\\ z_1^{(\lambda-2)}y_1+z_2^{(\lambda-2)}y_2+\cdots+z_{\lambda}^{(\lambda-2)}y_{\lambda}=0,\\ z_1^{(\lambda-1)}y_1+z_2^{(\lambda-1)}y_2+\cdots+z_{\lambda}^{(\lambda-1)}y_{\lambda}=(-1)^{\lambda-1}.\end{cases}$$

Wäre $D(z_1, z_2,\cdots z_{\lambda})=0$, so würde aus den Gleichungen $s_{0,0}=0$, $s_{0,1}=0,\cdots s_{0,\lambda-2}=0$ folgen, dass auch $s_{0,\lambda-1}$ verschwände, während dieser Ausdruck doch den Werth $(-1)^{\lambda-1}$ hat. Daher sind die Functionen z_1, $z_2,\cdots z_{\lambda}$ unter einander unabhängig. Vergleicht man die Gleichungen (8.) mit den Gleichungen (10.), so erkennt man, dass die Beziehung zwischen den Functionen $y_1, y_2,\cdots y_{\lambda}$ und $z_1, z_2,\cdots z_{\lambda}$ eine reciproke ist, abgesehen vom

Vorzeichen bei geradem λ. Aus jeder Relation zwischen diesen beiden Systemen von Functionen kann man daher eine neue herleiten, indem man

$$\text{mit} \quad \begin{matrix} y_1, \cdots & y_\lambda, \; z_1, \cdots z_\lambda \\ (-1)^{\lambda-1} z_1, \cdots & (-1)^{\lambda-1} z_\lambda \; y_1, \cdots y_\lambda \end{matrix}$$

vertauscht. Auf diese Weise ergiebt sich z. B. aus der Gleichung (4.)

$$(11.) \quad y_\varkappa = (-1)^{\varkappa-1} \frac{D(z_1, z_2, \ldots z_{\varkappa-1}, z_{\varkappa+1}, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)}.$$

In Folge dessen nennen wir $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ die den Functionen $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ *adjungirten* Functionen *).

§. 3.

Wenn man durch zeilenweise Zusammensetzung das Product der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdot\cdot\, y_\varkappa & y_{\varkappa+1} & \cdot\cdot\, y_\lambda \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ y_1^{(\varkappa-1)} & \cdot\cdot\, y_\varkappa^{(\varkappa-1)} & y_{\varkappa+1}^{(\varkappa-1)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(\varkappa-1)} \\ y_1^{(\varkappa)} & \cdot\cdot\, y_\varkappa^{(\varkappa)} & y_{\varkappa+1}^{(\varkappa)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(\varkappa)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ y_1^{(\lambda-1)} & \cdot\cdot\, y_\varkappa^{(\lambda-1)} & y_{\varkappa+1}^{(\lambda-1)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdot\cdot\, 0 & 0 & \cdot\cdot\, 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & \cdot\cdot\, 1 & 0 & \cdot\cdot\, 0 \\ z_1 & \cdot\cdot\, z_\varkappa & z_{\varkappa+1} & \cdot\cdot\, z_\lambda \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ z_1^{(\lambda-\varkappa-1)} & \cdot\cdot\, z_\varkappa^{(\lambda-\varkappa-1)} & z_{\varkappa+1}^{(\lambda-\varkappa-1)} & \cdot\cdot\, z_\lambda^{(\lambda-\varkappa-1)} \end{vmatrix}$$

bildet, deren eine gleich $D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)$, und deren andere gleich $D(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_\lambda)$ ist, so erhält man

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdot\cdot\, y_\varkappa & s_{0,0} & \cdot\cdot\, s_{0,\lambda-\varkappa-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ y_1^{(\varkappa-1)} & \cdot\cdot\, y_\varkappa^{(\varkappa-1)} & s_{\varkappa-1,0} & \cdot\cdot\, s_{\varkappa-1,\lambda-\varkappa-1} \\ y_1^{(\varkappa)} & \cdot\cdot\, y_\varkappa^{(\varkappa)} & s_{\varkappa,0} & \cdot\cdot\, s_{\varkappa,\lambda-\varkappa-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ y_1^{(\lambda-1)} & \cdot\cdot\, y_\varkappa^{(\lambda-1)} & s_{\lambda-1,0} & \cdot\cdot\, s_{\lambda-1,\lambda-\varkappa-1} \end{vmatrix}.$$

Da in dieser Determinante alle Elemente verschwinden, welche die ersten $\varkappa$ Zeilen mit den letzten $\lambda-\varkappa$ Colonnen gemeinsam haben, so reducirt sie sich auf das Product der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdot\cdot\, y_\varkappa \\ \cdot & \cdots \\ y_1^{(\varkappa-1)} & \cdot\cdot\, y_\varkappa^{(\varkappa-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{\varkappa,0} & \cdot\cdot\, s_{\varkappa,\lambda-\varkappa-1} \\ \cdot & \cdots \\ s_{\lambda-1,0} & \cdot\cdot\, s_{\lambda-1,\lambda-\varkappa-1} \end{vmatrix}.$$

---

*) Ich hatte ursprünglich den Ausdruck „reciproke Functionen" gebraucht, habe ihn aber mit dem Ausdruck „adjungirte Functionen" vertauscht, nachdem die Arbeit des Herrn *Fuchs* (dieses Journ. Bd. 76) zu meiner Kenntniss gekommen war.

Die erste ist gleich $D(y_1, y_2, \cdots y_\varkappa)$. In der andern verschwinden alle Elemente auf der linken Seite der Diagonale, die von rechts oben nach links unten führt. Daher ist in ihrer Entwicklung das einzige nicht verschwindende Glied

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa)(\lambda-\varkappa-1)}\, s_{\lambda-1,0}\, s_{\lambda-2,1} \cdots s_{\varkappa,\lambda-\varkappa-1} = 1.$$

Wir gelangen so zu der Gleichung

$$D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)\, D(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_\lambda) = D(y_1, y_2, \cdots y_\varkappa).$$

Setzt man $\varkappa = 0$, so lautet dieselbe

$$(12.)\quad D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)\, D(z_1, z_2, \cdots z_\lambda) = 1.$$

Daraus geht wieder hervor, dass, wenn $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ unter einander unabhängig sind, auch zwischen $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ keine lineare Relation bestehen kann. Als Resultat dieser Entwicklung können wir die Sätze aussprechen:

Das Product aus der Determinante mehrerer Functionen und der Determinante der ihnen adjungirten Functionen ist gleich 1.

Bedeutet $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \varrho, \sigma, \tau, \cdots$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots \lambda$, *so ist*

$$(13.)\quad D(y_\alpha, y_\beta, y_\gamma, \cdots) = \varepsilon\, D(z_\varrho, z_\sigma, z_\tau, \cdots)\, D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)$$

und

$$(14.)\quad D(z_\alpha, z_\beta, z_\gamma, \cdots) = \varepsilon\, D(y_\varrho, y_\sigma, y_\tau, \cdots)\, D(z_1, z_2, \cdots z_\lambda),$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, je nachdem die Permutation zur ersten oder zweiten Klasse gehört.

Aus diesem Satze ergiebt sich ein einfacher Beweis für die Formel (2.). Sind nämlich die den Functionen

$$u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_1, v_2, \cdots v_\nu$$

adjungirten Functionen

$$u_1', u_2', \cdots u_\mu', v_1', v_2', \cdots v_\nu',$$

und setzt man

$$w_\varkappa = D(u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_\varkappa),$$

so ist auch

$$w_\varkappa = (-1)^{\varkappa-1} D(v_1', v_2' \cdots v_{\varkappa-1}', v_{\varkappa+1}', \cdots v_\nu')\, D(u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_1, v_2, \cdots v_\nu).$$

Sind ferner die den Functionen $v_1', v_2', \cdots v_\nu'$ adjungirten Functionen $v_1'', v_2'', \cdots v_\nu''$, so ist

$$v_\varkappa'' = (-1)^{\nu+\varkappa} \frac{D(v_1', v_2', \ldots v_{\varkappa-1}', v_{\varkappa+1}', \ldots v_\nu')}{D(v_1', v_2', \ldots v_\nu')}$$

$$= \frac{(-1)^{\nu-1} w_\varkappa}{D(v_1', v_2', \ldots v_\nu')\, D(u_1, u_2, \ldots u_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\nu)} = \frac{(-1)^{\nu-1} w_\varkappa}{D(u_1, u_2, \ldots u_\mu)}.$$

Daher ist

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots u_\mu, v_1, v_2, \dots v_\nu)}{D(u_1, u_2, \dots u_\mu)} = \frac{1}{D(v'_1, v'_2, \dots v'_\nu)} = D(v_1'', v_2'', \cdots v_\nu'')$$
$$= \frac{D(w_1, w_2, \dots w_\nu)}{(D(u_1, u_2, \dots u_\mu))^\nu},$$

oder

$$(2.) \quad D(u_1, u_2, \cdots u_\mu, v_1, v_2, \cdots v_\nu) = \frac{D(w_1, w_2, \dots w_\nu)}{(D(u_1, u_2, \dots u_\mu))^{\nu-1}}.$$

§. 4.

Bisher haben wir nur von den Grössen z_κ gehandelt. Jetzt wenden wir uns zur Betrachtung der Ausdrücke

$$(6.) \quad P(y, z_\kappa) = (-1)^{\kappa-1} \frac{D(y, y_1, \dots y_{\kappa-1}, y_{\kappa+1}, \dots y_\lambda)}{D(y_1, y_2, \dots y_\lambda)}.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & \cdot\cdot\, y_\lambda \\ y^{(1)} & y_1^{(1)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ y^{(\lambda-1)} & y_1^{(\lambda-1)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(\lambda-1)} \\ y^{(\kappa)} & y_1^{(\kappa)} & \cdot\cdot\, y_\lambda^{(\kappa)} \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, wenn $\kappa < \lambda$ ist. Entwickelt man sie nach den in der letzten Zeile stehenden Elementen, so gelangt man zu der Gleichung

$$y^{(\kappa)} D(y_1, y_2, \cdot\cdot y_\lambda) - y_1^{(\kappa)} D(y, y_2, \cdot\cdot y_\lambda) + \cdots + (-1)^\lambda y_\lambda^{(\kappa)} D(y, y_1, \cdot\cdot\, y_{\lambda-1}) = 0.$$

Daraus ergiebt sich durch Division mit $D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda)$

$$(15.) \quad y^{(\kappa)} = y_1^{(\kappa)} P(y, z_1) + y_2^{(\kappa)} P(y, z_2) + \cdots + y_\lambda^{(\kappa)} P(y, z_\lambda) \ (\kappa < \lambda).$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Function $P(y, z)$ zu bilden, welche sowohl in Bezug auf y, als auch in Bezug auf z ein homogener linearer Differentialausdruck $(\lambda-1)$ter Ordnung ist und für $z = z_\kappa$ den Werth $P(y, z_\kappa)$ annimmt. Setzt man

$$P(y, z) = Yz + Y_1 z^{(1)} + \cdots + Y_{\lambda-1} z^{(\lambda-1)},$$

wo $Y, Y_1, \cdots Y_{\lambda-1}$ homogene lineare Differentialausdrücke $(\lambda-1)$ter Ordnung von y bedeuten, so hat man zur Bestimmung dieser λ unbekannten Coefficienten die λ linearen Gleichungen

$$P(y, z_\kappa) = Y z_\kappa + Y_1 z_\kappa^{(1)} + \cdots + Y_{\lambda-1} z_\kappa^{(\lambda-1)},$$

deren Determinante $D(z_1, z_2, \cdots z_\lambda)$ von Null verschieden ist. Daher ist die Function $P(y, z)$ durch die Bedingungen, denen sie genügen soll, vollständig bestimmt. Um sie bequem zu ermitteln, schlagen wir den Weg ein,

auf dem man die *Lagrange*sche Interpolationsformel herzuleiten pflegt. Wir bilden zuerst einen homogenen bilinearen Differentialausdruck, der für $z = z_1, \cdots z_{\varkappa-1}, z_{\varkappa+1}, \cdots z_\lambda$ verschwindet und für $z = z_\varkappa$ den Werth $P(y, z_\varkappa)$ hat. Ein solcher ist

$$D(y, y_1, \cdots y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \cdots y_\lambda)\, D(z, z_1, \cdots z_{\varkappa-1}, z_{\varkappa+1}, \cdots z_\lambda).$$

Indem wir dann die sämmtlichen so gebildeten Ausdrücke zusammenzählen, erhalten wir

$$(16.)\quad P(y, z) = D(y, y_2, y_3, \cdots y_\lambda)\, D(z, z_2, z_3, \cdots z_\lambda)$$
$$+ D(y, y_1, y_3, \cdots y_\lambda)\, D(z, z_1, z_3, \cdots z_\lambda) + \cdots + D(y, y_1, y_2, \cdots y_{\lambda-1})\, D(z, z_1, z_2, \cdots z_{\lambda-1}).$$

Daraus folgt

$$(17.)\quad P(y_\varkappa, z) = (-1)^{\varkappa-1} \frac{D(z, z_1, \ldots z_{\varkappa-1}, z_{\varkappa+1}, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)}.$$

Für diese Ausdrücke gelten die den Relationen (15.) analogen Gleichungen

$$(18.)\quad z^{(\varkappa)} = z_1^{(\varkappa)} P(y_1, z) + z_2^{(\varkappa)} P(y_2, z) + \cdots + z_\lambda^{(\varkappa)} P(y_\lambda, z) \quad (\varkappa < \lambda).$$

Aus der Gleichung (3.) ergiebt sich

$$\frac{D(z_1, \ldots z_{\varkappa-1}, z_{\varkappa+1}, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)} \cdot \frac{D(z, z_1, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)} = -\frac{d}{dx} \frac{D(z, z_1 \ldots z_{\varkappa-1}, z_{\varkappa+1}, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)}.$$

Daher folgt aus den Gleichungen (11.) und (17.) wenn man noch

$$(19.)\quad P'(z) = (-1)^\lambda \frac{D(z, z_1, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)}$$

setzt,

$$(20.)\quad y_\varkappa P'(z) = (-1)^{\lambda-1} \frac{d}{dx} P(y_\varkappa, z).$$

§. 5.

Die Ausdrücke $P(y)$ und $P'(z)$ sind als Determinantenquotienten definirt, und die Function $P(y, z)$ ist als eine Summe von Determinantenproducten dargestellt. Wir wollen jetzt alle diese Ausdrücke auf die Form von Determinanten bringen.

In Folge der Gleichung (12.) ist

$$P(y) = (-1)^\lambda \frac{D(y, y_1, \ldots y_\lambda)}{D(y_1, y_2, \ldots y_\lambda)} = (-1)^\lambda D(y, y_1, \cdots y_\lambda)\; D(z_1, z_2, \cdots z_\lambda)$$

oder gleich

$$(-1)^\lambda \begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_\lambda \\ y^{(1)} & y_1^{(1)} & \cdots & y_\lambda^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y^{(\lambda)} & y_1^{(\lambda)} & \cdots & y_\lambda^{(\lambda)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & \cdots & z_\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & z_1^{(\lambda-1)} & \cdots & z_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix}.$$

Mithin ist

$$(21.)\quad P(y) = (-1)^\lambda \begin{vmatrix} y & s_{0,0} & s_{0,1} & \cdot\cdot & s_{0,\lambda-1} \\ y^{(1)} & s_{1,0} & s_{1,1} & \cdot\cdot & s_{1,\lambda-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \\ y^{(\lambda)} & s_{\lambda,0} & s_{\lambda,1} & \cdot\cdot & s_{\lambda,\lambda-1} \end{vmatrix}$$

und ebenso

$$(22.)\quad P'(z) = (-1)^\lambda \begin{vmatrix} z & z^{(1)} & \cdot\cdot & z^{(\lambda)} \\ s_{0,0} & s_{0,1} & \cdot\cdot & s_{0,\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \\ s_{\lambda-1,0} & s_{\lambda-1,1} & \cdot\cdot & s_{\lambda-1,\lambda} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (15.) geht, wenn man, wie oben,

$$-P(y, z) + Yz + Y_1 z^{(1)} + \cdots + Y_{\lambda-1} z^{(\lambda-1)} = 0$$

setzt, in

$$-y^{(\kappa)} + Ys_{\kappa,0} + Y_1 s_{\kappa,1} + \cdots + Y_{\lambda-1} s_{\kappa,\lambda-1}$$

über. Indem man aus diesen $\lambda+1$ homogenen linearen Gleichungen die $\lambda+1$ Grössen

$$-1,\ Y,\ Y_1, \cdots Y_{\lambda-1}$$

eliminirt, findet man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} P(y, z) & z & z^{(1)} & \cdot\cdot & z^{(\lambda-1)} \\ y & s_{0,0} & s_{0,1} & \cdot\cdot & s_{0,\lambda-1} \\ y^{(1)} & s_{1,0} & s_{1,1} & \cdot\cdot & s_{1,\lambda-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \\ y^{(\lambda-1)} & s_{\lambda-1,0} & s_{\lambda-1,1} & \cdot\cdot & s_{\lambda-1,\lambda-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Auf der linken Seite ist der Coefficient von $P(y, z)$ die Determinante $\Sigma \pm s_{0,0}\, s_{1,1} \cdots s_{\lambda-1,\lambda-1}$. In derselben verschwinden alle Elemente oberhalb der Diagonale, welche von rechts oben nach links unten führt. Daher reducirt sie sich auf das Glied

$$(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)}\, s_{0,\lambda-1}\, s_{1,\lambda-2} \cdots s_{\lambda-1,0} = 1.$$

Mithin ist

$$(23.)\quad P(y, z) = -\begin{vmatrix} 0 & z & z^{(1)} & \cdot\cdot & z^{(\lambda-1)} \\ y & s_{0,0} & s_{0,1} & \cdot\cdot & s_{0,\lambda-1} \\ y^{(1)} & s_{1,0} & s_{1,1} & \cdot\cdot & s_{1,\lambda-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \\ y^{(\lambda-1)} & s_{\lambda-1,0} & s_{\lambda-1,1} & \cdot\cdot & s_{\lambda-1,\lambda-1} \end{vmatrix}$$

Die Gleichungen (7.) und (20.) geben den Werth der Ableitung von $P(y, z)$ an, wenn entweder y einen der Werthe $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ oder z einen

der Werthe $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ hat. Allgemein lässt sich diese Ableitung folgendermaassen berechnen:

In der Gleichung (23.), welche nach x differentiirt werden soll, denke man sich für $s_{\alpha,\beta}$ seinen Werth aus Formel (9.) eingesetzt. Alsdann möge die Ableitung der Determinante auf der rechten Seite der Gleichung (23.) wenn $z, z_1, \cdots z_\lambda$ als constant betrachtet werden, den Werth P_1, wenn aber $y, y_1, \cdots y_\lambda$ als constant betrachtet werden, den Werth P_2 haben. Nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung ist unter diesen Voraussetzungen

$$\frac{d}{dx} P(y, z) = P_1 + P_2.$$

In dieser Gleichung ist

$$P_1 = -\begin{vmatrix} 0 & z & \cdot\cdot\, z^{(\lambda-2)} & z^{(\lambda-1)} \\ y & s_{0,0} & \cdot\cdot\, s_{0,\lambda-2} & s_{0,\lambda-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ y^{(\lambda-2)} & s_{\lambda-2,0} & \cdot\cdot\, s_{\lambda-2,\lambda-2} & s_{\lambda-2,\lambda-1} \\ y^{(\lambda)} & s_{\lambda,0} & \cdot\cdot\, s_{\lambda,\lambda-2} & s_{\lambda,\lambda-1} \end{vmatrix}, P_2 = -\begin{vmatrix} 0 & z & \cdot\cdot\, z^{(\lambda-2)} & z^{(\lambda)} \\ y & s_{0,0} & \cdot\cdot\, s_{0,\lambda-2} & s_{0,\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \\ y^{(\lambda-2)} & s_{\lambda-2,0} & \cdot\cdot\, s_{\lambda-2,\lambda-2} & s_{\lambda-2,\lambda} \\ y^{(\lambda-1)} & s_{\lambda-1,0} & \cdot\cdot\, s_{\lambda-1,\lambda-2} & s_{\lambda-1,\lambda} \end{vmatrix}$$

Die Determinante

$$(-1)^\lambda \begin{vmatrix} z & 0 & z & \cdot\cdot\, z^{(\lambda-1)} \\ s_{0,0} & y & s_{0,0} & \cdot\cdot\, s_{0\,\lambda-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ s_{\lambda,0} & y^{(\lambda)} & s_{\lambda,0} & \cdot\cdot\, s_{\lambda,\lambda-1} \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, weil die Elemente der ersten Colonne mit denen der dritten übereinstimmen. Entwickelt man sie nach den in der ersten Colonne stehenden Elementen, von denen nur drei von Null verschieden sind, so erhält man

$$z\, P(y) - s_{\lambda-1,0}\, P_1 + s_{\lambda,0}\, P(y, z) = 0.$$

Auf ähnliche Weise gelangt man zu der Gleichung

$$y\, P(z) - s_{0,\lambda-1}\, P_2 + s_{0,\lambda}\, P(y, z) = 0.$$

Nun ist aber

$$s_{\lambda-1,0} = 1,\ s_{0,\lambda-1} = (-1)^{\lambda-1},\ s_{0,\lambda} = (-1)^\lambda\, s_{\lambda,0}.$$

Mithin ergiebt sich aus den vorigen Gleichungen

$$(24.)\quad \frac{d}{dx} P(y, z) = z\, P(y) - (-1)^\lambda\, y\, P(z).$$

§. 6.

Von den entwickelten Relationen wollen wir einige Anwendungen auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen machen. Aus den Gleichungen (7.) und (11.) ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Von zwei Systemen adjungirter Functionen enthält jedes die Multiplicatoren der linearen Differentialgleichung, deren Integrale die Functionen des andern sind, und in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich eins ist.

Ist daher

$$(25.)\quad P(y) = \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} + p_1 \frac{d^{\lambda-1} y}{dx^{\lambda-1}} + \cdots + p_\lambda y,$$

so ist

$$(26.)\quad P'(z) = \frac{d^\lambda z}{dx^\lambda} - \frac{d^{\lambda-1}(p_1 z)}{dx^{\lambda-1}} + \cdots + (-1)^\lambda p_\lambda z$$

und

$$(27.)\quad P(y, z) = z \frac{d^{\lambda-1} y}{dx^{\lambda-1}} + \left(p_1 z - \frac{dz}{dx}\right) \frac{d^{\lambda-2} y}{dx^{\lambda-2}} + \left(p_2 z - \frac{d(p_1 z)}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2}\right) \frac{d^{\lambda-3} y}{dx^{\lambda-3}}$$
$$+ \cdots + \left(p_{\lambda-1} z - \frac{d(p_{\lambda-2} z)}{dx} + \cdots + (-1)^{\lambda-1} \frac{d^{\lambda-1} z}{dx^{\lambda-1}}\right) y.$$

Ist p eine gegebene Function von x, und ist y ein Integral der completen linearen Differentialgleichung

$$P(y) = p,$$

so folgt aus den Gleichungen (7.) und (15.)

$$y^{(\varkappa)} = y_1^{(\varkappa)} \int z_1 p\, dx + y_2^{(\varkappa)} \int z_2 p\, dx + \cdots + y_\lambda^{(\varkappa)} \int z_\lambda p\, dx.$$

Daraus ergiebt sich der Satz:

Sind $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ von einander unabhängige Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung λ ter Ordnung $P(y) = 0$, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 *ist, und sind $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ die ihnen adjungirten Functionen, so ist*

$$y = y_1 \int z_1 p\, dx + y_2 \int z_2 p\, dx + \cdots + y_\lambda \int z_\lambda p\, dx$$

das allgemeine Integral der vollständigen linearen Differentialgleichung $P(y) = p$.

Die Formel (3.) lautet für $\varkappa = \lambda$

$$\frac{D(y, y_1, \ldots y_\lambda)}{D(y_1, y_2, \ldots y_\lambda)} = -\frac{D(y_1, y_2, \ldots y_\lambda)}{D(y_1, y_2, \ldots y_{\lambda-1})} \frac{d}{dx} \frac{D(y, y_1, \ldots y_{\lambda-1})}{D(y_1, y_2, \ldots y_\lambda)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$D_\varkappa = D(y_1, y_2, \cdots y_\varkappa),\; D_0 = 1,$$

so gelangt man durch wiederholte Anwendung dieser Formel zu der Gleichung

$$(28.)\quad P(y) = \frac{D_\lambda}{D_{\lambda-1}} \frac{d}{dx} \frac{D_{\lambda-1}^2}{D_\lambda D_{\lambda-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \frac{y}{D_1}.$$

Für $\varkappa = 1$ ergiebt sich aus der Formel (2.)

$$\frac{D(z, z_2, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)} = -\frac{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)}{D(z_2, z_3, \ldots z_\lambda)} \frac{d}{dx} \frac{D(z, z_2, \ldots z_\lambda)}{D(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)}.$$

Bedenkt man, dass

$$D(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_\lambda) = \frac{D_\varkappa}{D_\lambda}$$

ist, so findet man durch wiederholte Anwendung dieser Formel die Gleichung

$$(29.)\quad P'(z) = \frac{1}{D_1} \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_{\lambda-1}^2}{D_\lambda D_{\lambda-2}} \frac{d}{dx} \frac{D_\lambda z}{D_{\lambda-1}}.$$

Den in den Gleichungen (28.) und (29.) enthaltenen Satz kann man so aussprechen:

Die Multiplicatoren der linearen Differentialgleichung

$$v_\lambda \frac{d}{dx} v_{\lambda-1} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} v_1 \frac{d}{dx} v_0 y = 0$$

genügen der linearen Differentialgleichung

$$v_0 \frac{d}{dx} v_1 \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} v_{\lambda-1} \frac{d}{dx} v_\lambda z = 0.$$

Berlin, im Juni 1873.

Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

(Von Herrn *Cantor* in Halle a. S.)

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgrösse ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$(1.) \quad a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

wo $n, a_0, a_1, \cdots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Theiler und die Gleichung (1.) irreductibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, dass nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1.), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1.) höchstens soviel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angiebt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesammtheit einen Inbegriff von Zahlgrössen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, dass in jeder Nähe irgend einer gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, dass man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuördnen kann, so dass zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, dass also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmässigen Reihe:

$$(2.) \quad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots$$

gedacht werden kann, in welcher sämmtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2.), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, lässt sich dasselbe nach Willkür modificiren; es wird daher genügen, wenn ich in §. 1 denjenigen Anordnungsmodus mittheile, welcher, wie mir scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen eine Anwendung zu geben, füge ich zu dem §. 1 den §. 2 hinzu, in welchem ich zeige, dass, wenn eine beliebige Reihe reeller Zahlgrössen von der Form (2.) vorliegt, man in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ Zahlen η bestimmen kann, welche nicht in (2.) enthalten sind; combinirt man die Inhalte dieser beiden Paragraphen, so ist damit ein neuer Beweis des zuerst von *Liouville* bewiesenen Satzes gegeben, dass es in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unendlich viele transcendente, d. h. nicht algebraische reelle Zahlen giebt. Ferner stellt sich der Satz in §. 2 als der Grund dar, warum Inbegriffe reeller Zahlgrössen, die ein sogenanntes Continuum bilden (etwa die sämmtlichen reellen Zahlen, welche ≥ 0 und ≤ 1 sind) sich nicht eindeutig auf den Inbegriff (ν) beziehen lassen; so fand ich den deutlichen Unterschied zwischen einem sogenannten Continuum und einem Inbegriffe von der Art der Gesammtheit aller reellen algebraischen Zahlen.

§. 1.

Gehen wir auf die Gleichung (1.), welcher eine algebraische Zahl ω genügt und welche nach den gedachten Festsetzungen eine völlig bestimmte ist, zurück, so möge die Summe der absoluten Beträge ihrer Coefficienten, vermehrt um die Zahl $n-1$, wo n den Grad von ω angiebt, die *Höhe* der Zahl ω genannt und mit N bezeichnet werden; es ist also, unter Anwendung einer üblich gewordenen Bezeichnungsweise:

$$(3.) \quad N = n-1+[a_0]+[a_1]+\cdots+[a_n].$$

Die Höhe N ist darnach für jede reelle algebraische Zahl ω eine bestimmte positive ganze Zahl; umgekehrt giebt es zu jedem positiven ganzzahligen Werthe von N nur eine endliche Anzahl algebraischer reeller Zahlen mit der Höhe N; die Anzahl derselben sei $\varphi(N)$; es ist beispiels-

weise $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 4$. Es lassen sich alsdann die Zahlen des Inbegriffes (ω), d. h. sämmtliche algebraischen reellen Zahlen folgendermassen anordnen; man nehme als erste Zahl ω_1 die eine Zahl mit der Höhe $N = 1$; lasse auf sie, der Grösse nach steigend, die $\varphi(2) = 2$ algebraischen reellen Zahlen mit der Höhe $N = 2$ folgen, bezeichne sie mit ω_2, ω_3; an diese mögen sich die $\varphi(3) = 4$ Zahlen mit der Höhe $N = 3$, ihrer Grösse nach aufsteigend, anschliessen; allgemein mögen, nachdem in dieser Weise sämmtliche Zahlen aus (ω) bis zu einer gewissen Höhe $N = N_1$ abgezählt und an einen bestimmten Platz gewiesen sind, die reellen algebraischen Zahlen mit der Höhe $N = N_1 + 1$ auf sie folgen und zwar der Grösse nach aufsteigend; so erhält man den Inbegriff (ω) aller reellen algebraischen Zahlen in der Form:

$$\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots\cdots$$

und kann mit Rücksicht auf diese Anordnung von der νten reellen algebraischen Zahl reden, wobei keine einzige aus dem Inbegriffe (ω) vergessen ist. —

§. 2.

Wenn eine nach irgend einem Gesetze gegebene unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrössen:

$$(4.) \quad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots\cdots$$

vorliegt, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4.) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

Wir gehen zu dem Ende von dem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ aus, welches uns beliebig vorgegeben sei, und es sei $\alpha < \beta$; die ersten beiden Zahlen unserer Reihe (4.), welche im Innern dieses Intervalles (mit Ausschluss der Grenzen liegen, mögen mit α', β' bezeichnet werden, und es sei $\alpha' < \beta'$; ebenso bezeichne man in unserer Reihe die ersten beiden Zahlen, welche im Innern von $(\alpha' \cdots \beta')$ liegen, mit α'', β'', und es sei $\alpha'' < \beta''$, und nach demselben Gesetze bilde man ein folgendes Intervall $(\alpha''' \cdots \beta''')$ u. s. w. Hier sind also α', $\alpha'' \cdots$ der Definition nach bestimmte Zahlen unserer Reihe (4.), deren Indices im fortwährenden Steigen sich befinden, und das Gleiche gilt von den Zahlen β', $\beta'' \cdots$; ferner nehmen die Zahlen α', α'', $\cdots$

ihrer Grösse nach fortwährend zu, die Zahlen $\beta', \beta'', \cdots$ nehmen ihrer Grösse nach fortwährend ab; von den Intervallen $(\alpha \cdots \beta)$, $(\alpha' \cdots \beta')$, $(\alpha'' \cdots \beta'')$, $\cdots$ schliesst ein jedes alle auf dasselbe folgenden ein. — Hierbei sind nun zwei Fälle denkbar.

Entweder die Anzahl der so gebildeten Intervalle ist endlich; das letzte von ihnen sei $(\alpha^{(\nu)} \cdots \beta^{(\nu)})$; da im Innern desselben höchstens eine Zahl der Reihe (4.) liegen kann, so kann eine Zahl η in diesem Intervalle angenommen werden, welche nicht in (4.) enthalten ist, und es ist somit der Satz für diesen Fall bewiesen. —

Oder die Anzahl der gebildeten Intervalle ist unendlich gross; dann haben die Grössen $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$, weil sie fortwährend ihrer Grösse nach zunehmen, ohne ins Unendliche zu wachsen, einen bestimmten Grenzwerth α^∞; ein gleiches gilt für die Grössen $\beta, \beta', \beta'', \cdots$, weil sie fortwährend ihrer Grösse nach abnehmen, ihr Grenzwerth sei β^∞; ist $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (ein Fall, der bei dem Inbegriffe (ω) aller reellen algebraischen Zahlen stets eintritt), so überzeugt man sich leicht, wenn man nur auf die Definition der Intervalle zurückblickt, dass die Zahl $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ nicht in unserer Reihe enthalten sein kann*); ist aber $\alpha^\infty < \beta^\infty$, so genügt jede Zahl η im Innern des Intervalles $(\alpha^\infty \cdots \beta^\infty)$ oder auch an den Grenzen desselben der gestellten Forderung, nicht in der Reihe (4.) enthalten zu sein. —

Die in diesem Aufsatze bewiesenen Sätze lassen Erweiterungen nach verschiedenen Richtungen zu, von welchen hier nur eine erwähnt sei:

„Ist $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n, \cdots$ eine endliche oder unendliche Reihe von einander linear unabhängiger Zahlen (so dass keine Gleichung von der Form $a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + \cdots + a_n \omega_n = 0$ mit ganzzahligen Coefficienten, die nicht sämmtlich verschwinden, möglich ist) und denkt man sich den Inbegriff (Ω) aller derjenigen Zahlen Ω, welche sich als rationale Functionen mit ganzzahligen Coefficienten aus den gegebenen Zahlen ω darstellen lassen, so giebt es in jedem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unendlich viele Zahlen, die nicht in (Ω) enthalten sind."

In der That überzeugt man sich durch eine ähnliche Schlussweise,

---

*) Wäre die Zahl η in unserer Reihe enthalten, so hätte man $\eta = \omega_p$, wo p ein bestimmter Index ist; dies ist aber nicht möglich, denn ω_p liegt nicht im Innern des Intervalles $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, während die Zahl η ihrer Definition nach im Innern dieses Intervalles liegt.

[illegible] die Richtigkeit des [illegible]

[illegible] angeführten Satzes (in welchem [illegible] der Grad der rationalen [illegible] vorgegebener ist) ist, [illegible] von Herrn *B. Minnigerode* [illegible] von [illegible]*ebsch* und *Neumann*, [illegible]

[illegible]

Bemerkung zu der *Geiser*schen die Curven dritter Ordnung betreffenden Abhandlung: „Ueber zwei geometrische Probleme“ im 67. Bande dieses Journals.

(Von Herrn *Milinowski* in Tilsit.)

Das erste der in der genannten Abhandlung gelösten Probleme heisst:

Wenn von den 9 Durchschnittspunkten zweier Curven dritter Ordnung sieben fest bleiben, während der achte nach einem bestimmten Gesetz sich bewegt, nach welchem Gesetz ändert dann der neunte seine Lage?

Dieses Problem lässt sich auf eine der beiden folgenden, von der gegebenen ganz verschiedenen, Arten lösen, die sich auf das allgemeinere Problem für Curven ganz beliebiger Ordnung ausdehnen lassen. Die erste dieser Arten stützt sich auf die von Hrn. *Cremona* (Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven) entwickelten Eigenschaften eines Curvennetzes. Alle Curven dritter Ordnung, welche durch sieben feste Punkte $A_1, A_2, \cdots A_7$ gehen, bilden ein Netz; alle Curven desselben, welche durch einen achten Punkt B gehen, treffen sich noch in einem neunten Punkt B und bilden ein Büschel. Wir nehmen vier beliebige Curven des Netzes, von denen keine drei zu einem Büschel gehören, und bezeichnen sie mit C_1^3 C_2^3 C_3^3 C_4^3 und lassen ihnen 4 Punkte P_1 P_2 P_3 P_4 entsprechen, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dadurch ist jedem Punkte P eine bestimmte Curve C^3 zugeordnet und umgekehrt. Allen Curven $C^3 \cdots$, welche durch einen Punkt B gehen, entsprechen die Punkte $P \cdots$ einer Geraden b; da alle diese Curven aber auch durch B' gehen, so können wir sagen, jedem Punkt B oder B', in denen sich die Curven eines Büschels schneiden, ist eine Gerade b, und jeder Geraden b sind zwei Punkte B

und B' zugeordnet. Wenn sich B auf einer Geraden g bewegt, so wird die Gerade b von einer Curve dritter Classe eingehüllt, die mit $\mathfrak{G}_3$ bezeichnet werde; geht g durch einen der sieben Grundpunkte des Netzes, etwa durch A_1, so zerfällt $\mathfrak{G}_3$ in einen Kegelschnitt $\mathfrak{G}_2$ und den Punkt A_1; ist g die Verbindungslinie zweier Grundpunkte A_1 und A_2, so zerfällt $\mathfrak{G}_3$ in die beiden Punkte A_1 und A_2 und einen dritten $\mathfrak{G}_1$. Denn ist P ein beliebiger Punkt, so schneidet die ihm entsprechende Curve C^3 die g in 3 Punkten B, deren entsprechende Gerade b sich in P treffen; geht g durch A_1, so fällt einer der drei Punkte B mit A_1 zusammen, also gehen durch P nur zwei Gerade b, und wenn g die Gerade $A_1 A_2$ ist, so fallen zwei Punkte B mit A_1 resp. A_2 zusammen und durch P geht nur eine Gerade b. Wir suchen die allen Tangenten b von $\mathfrak{G}_3$ entsprechenden Punkte B'. Sie werden eine Curve erfüllen, deren Ordnung wir bestimmen wollen. Es sei m eine beliebige Gerade, so ist ihr eine Curve $\mathfrak{M}_3$ dritter Classe zugeordnet, der Ort der den Punkten B von m entsprechenden Geraden b. Die Curven $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{M}_3$ haben 9 gemeinschaftliche Tangenten b, deren entsprechende Punkte B' auf m liegen; einer von diesen Punkten ist aber der Schnittpunkt von g und m, also folgt, dass ausser diesem Punkt auf einer beliebigen Geraden m acht Punkte B' liegen. — Wir ziehen m durch einen der sieben Grundpunkte, etwa durch A_1, so entspricht ihr ein Kegelschnitt $\mathfrak{M}_2$, welcher mit $\mathfrak{G}_3$ sechs gemeinschaftliche Tangenten hat; also liegen auf einer beliebigen, durch einen der Grundpunkte gezogenen Geraden m nur fünf Punkte B', wenn man wieder den Schnittpunkt von m und g nicht mitrechnet. Von den acht Punkten B', die auf einer beliebigen Geraden m liegen, fallen in dem Falle, dass m durch einen der Grundpunkte geht, drei mit diesem zusammen. Daraus folgt:

Bewegt sich B auf einer Geraden g, so bewegt sich B' auf einer Curve K^8 achter Ordnung, welche in jedem der sieben Grundpunkte einen dreifachen Punkt hat.

Die *Hesse*sche Curve des Netzes ist (cf. *Cremona* art. 95) eine Curve H^6 sechster Ordnung, welche die 7 Grundpunkte zu Doppelpunkten hat, und daraus folgt:

Sollen von den 9 Durchschnittspunkten zweier Curven dritter Ordnung, von denen 7 fest sind, die beiden übrigen zu-

sammenfallen, so ist der Ort dieser zusammenfallenden Punkte eine Curve H^6 sechster Ordnung, welche die 7 Grundpunkte zu Doppelpunkten hat.

Es seien nun $A_1, A_2, \cdots A_{q-2}$, worin $q = \frac{1}{2}n(n+3)$ sein soll, $q-2$ feste Punkte, in denen sich die Curven C^n $n$ter Ordnung schneiden sollen. Diese bilden also ein Netz, und man kann zwischen den Curven $C^n \cdots$ des Netzes und den Punkten $P \ldots$ der Ebene eine eindeutige Beziehung herstellen. Alle Curven $C^n \ldots$, welche sich noch in einem Punkt B schneiden, bilden ein Büschel und schneiden sich noch in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = r$ Punkten B'. Wenn nun B auf einer Curve K^m $m$ter Ordnung sich bewegt, welche Curve K^x durchlaufen die Punkte $B' \ldots$? Ist P ein beliebiger Punkt und C^n die ihm entsprechende Curve, so schneidet sie K^m in mn Punkten B, deren entsprechende Gerade b sämmtlich durch P gehen; also werden die den Punkten $B \ldots$ von K^m entsprechenden Geraden $b \ldots$ von einer Curve $\mathfrak{G}_{mn}$ der mnten Classe umhüllt. Geht K^m durch einen der $q-2$ Grundpunkte, so verringert sich die Klasse der Curve $\mathfrak{G}_{mn}$ um 1, geht K^m durch 2 Grundpunkte, so verringert sie sich um 2, u. s. f. Um zu erkennen, wie viele Punkte $B' \ldots$, die den Tangenten von $\mathfrak{G}_{mn}$ entsprechen, auf einer Geraden g liegen, bestimme man den Ort der Geraden $b \ldots$, welche den Punkten $B \ldots$ von g entsprechen; dieser ist, da g von der ersten Ordnung, eine Curve $\mathfrak{G}_n$ $n$ter Klasse. Sie hat mit $\mathfrak{G}_{mn}$ $m \cdot n^2$ gemeinschaftliche Tangenten, also liegen auf g auch $m \cdot n^2$ Punkte $B' \ldots$, welche den Tangenten $b \ldots$ von $\mathfrak{G}_{mn}$ entsprechen. Hiervon ziehe man die m Schnittpunkte von K^m und g ab, so erhält man auf jeder Geraden g noch $m \cdot n^2 - m$ oder $m(n^2-1)$ Punkte $B' \ldots$ Ist g eine Gerade durch einen der $q-2$ Grundpunkte, z. B. A_1, so ist der Ort der Geraden $b \ldots$, welche den Punkten $B \ldots$ von g entsprechen, eine Curve der $n$ten Klasse, welche aus dem Punkte A_1 und einer Curve $\mathfrak{G}_{n-1}$ der $(n-1)$ten Klasse besteht. Letztere hat mit $\mathfrak{G}_{mn}$ $mn(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten $b \ldots$, deren entsprechende Punkte $B' \ldots$ auf g liegen. Von ihnen hat man wieder die m Schnittpunkte von K^m und g fortzulassen, so dass auf g nur $m[n(n-1)-1]$ Punkte $B' \ldots$ zu rechnen sind. Dies sind aber mn Punkte weniger als auf einer beliebigen Geraden g, die durch keinen der Grundpunkte geht, daher ist A_1 ein mn-facher Punkt des Ortes der Punkte $B' \ldots$, und zwar liegen in

A_1 die Punkte $B'\ldots$, welche den mn Tangenten von A_1 an $\mathfrak{S}_{mn}$, als Gerade $b\ldots$ aufgefasst, entsprechen. Da A_1 ein ganz beliebiger Grundpunkt war, so folgt:

Bewegt sich ein Punkt B auf einer Curve K^m der $m$ten Ordnung, so durchlaufen die $r-1$ Punkte $B'\ldots$ eine Curve der $m(n^2-1)$ten Ordnung, welche jeden der $q-2$ Grundpunkte $A_1, \ldots A_{q-2}$ zu einem mn-fachen Punkt hat.

Wir denken uns die Curve K^{mn} durch p von den $q-2$ Grundpunkten gelegt, $p \leqq q-2$, so ist der Ort der den Punkten $B\ldots$ von K^m entsprechenden Geraden $b\ldots$ eine Curve der mnten Klasse, die aber aus den p Punkten $A_1, \ldots A_p$ und einer Curve $\mathfrak{S}_{mn-p}$ der $(mn-p)$ten Classe besteht. Die den Punkten B einer beliebigen Geraden g entsprechenden Geraden $b\ldots$ werden von einer Curve $\mathfrak{S}_n$ der $n$ten Klasse eingehüllt. Letztere hat mit $\mathfrak{S}_{mn-p}$ $(mn-p)n$ gemeinschaftliche Tangenten, daher liegen auf g eben so viel Punkte $B'\ldots$, also ist der Ort der Punkte $B'\ldots$ eine Curve K der $[(mn-p)\cdot n-m]$ten Ordnung. Von jedem der Punkte $A_1, \ldots A_p$ lassen sich an $\mathfrak{S}_n$ noch n Tangenten ziehen; die diesen, als Gerade $b\ldots$ aufgefasst, entsprechenden Punkte $B'\ldots$ liegen noch auf p Curven $\mathfrak{K}_1^n, \ldots \mathfrak{K}_p^n$, der $n$ten Ordnung. — Ist g eine beliebige Gerade durch einen der Grundpunkte, z. B. A_1, durch welchen auch K^m geht, und durchläuft ein Punkt B dieselbe, so ist die Enveloppe der ihm entsprechenden Geraden b eine Curve $\mathfrak{S}_{n-1}$ der $(n-1)$ten Klasse und der Punkt A_1. Die erstere hat mit $\mathfrak{S}_{mn-p}$ $(mn-p)(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten und daher liegen ebensoviel Punkte $B'\ldots$ auf g, doch sind von ihnen wieder die Schnittpunkte von K^m und g fortzulassen, bis auf einen, nämlich A_1, also sind auf g noch $[(mn-p)(n-1)-(m-1)]$ Punkte $B'\ldots$, und daher sind in diesem Fall im Punkt A_1 noch $mn-p-1$ Punkte B' vereinigt. Legen wir g durch irgend einen der Grundpunkte, durch welche K^m nicht geht, so finden wir, dass in ihm $mn-p$ Punkte $B'\ldots$ vereinigt sind. Ebenso lässt sich zeigen, dass jede der p Curven $\mathfrak{K}_1^n, \ldots \mathfrak{K}_p^n$ die p Punkte $A_1, \ldots A_p$, durch welche K^m geht, zu Doppelpunkten, und die übrigen Grundpunkte $A_{p+1}, \ldots A_{q-2}$ zu einfachen Punkten hat. Aus Allem folgt:

Geht eine Curve K^m der $m$ten Ordnung durch p Grundpunkte $A_1, \ldots A_p$, $p \leqq q-2$, und es bewegt sich ein Punkt B auf

derselben, so durchlaufen die $r-1$ entsprechenden Punkte B' ... eine Curve K der $[(mn-p)\,n-m]$ten Ordnung und p Curven $\mathfrak{K}_1^n, \ldots \mathfrak{K}_p^n$, jede von der $n$ten Ordnung. Die Curve K hat in jedem der p Grundpunkte, durch welche K^m geht, einen $(mn-p-1)$fachen und in jedem der übrigen einen $(mn-p)$fachen Punkt. Jede der Curven $\mathfrak{K}_1^n, \ldots \mathfrak{K}_p^n$ hat jeden der p Grundpunkte, durch welche K^m geht, zum Doppelpunkt, jeden der übrigen zum einfachen Punkt.

Aus diesen Sätzen ergeben sich unmittelbar die in der citirten Abhandlung enthaltenen Sätze über Curven dritter Ordnung. Wir haben $q-2=7$ und $n=3$ zu setzen; wählen wir noch $p=1$, $m=1$ oder $p=2$, $m=1$ oder $p=5$, $m=2$, so erhalten wir die Sätze I. 1.) und 2.) auf Seite 78 und II. 4.) auf Seite 80 des 67. Bandes dieses Journals.

Die andere Methode zur Ableitung dieser Sätze ist folgende. — Es seien wieder $C^n \cdots$ die Curven $n$ter Ordnung durch $q-2=\frac{1}{2}n(n+3)-2$ Punkte $A_1, \ldots A_{q-2}$ und Z ein beliebiger Punkt, $c_1 \ldots$ seine geraden Polaren bezüglich der Curven $C^n \ldots$ Alle Curven $C^n \ldots$ weisen wir einem ebenen System Σ zu, alle Geraden $c_1 \ldots$ einem ebenen System Σ_1, so besteht zwischen den Systemen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft. Einer Curve K^m von Σ wird in Σ_1 eine Curve K_1^x der $x$ten Ordnung entsprechen; irgend einer Geraden c_1 von Σ_1 und ihren x Schnittpunkten mit K_1^x entsprechen in Σ eine Curve C^n und deren mn Schnittpunkte mit K^m, also ist $x=mn$. Je zwei Curven C^n schneiden sich in n^2 Punkten, von denen $q-2$ die festen Punkte $A_1, \ldots A_{q-2}$ sind; den übrigen r Schnittpunkten, als zu Σ gehörig betrachtet, entspricht in Σ_1 der Schnittpunkt der beiden Geraden c_1, welche jenen Curven C^n entsprechen und umgekehrt. Einer der r Schnittpunkte sei B und durchlaufe die Curve K^m, so durchläuft der ihm in Σ_1 entsprechende B_1 eine Curve K_1^{mn} von der mnten Ordnung. Um den Ort der übrigen, dem Punkte B verbundenen $r-1$ Punkte B' ... zu erhalten, hat man wieder die Curve K^y in Σ aufzusuchen, welche der Curve K_1^{mn} von Σ_1 entspricht. Einer beliebigen Geraden g und ihren y Schnittpunkten mit $\mathfrak{K}^y$, zu Σ gerechnet, entsprechen in Σ_1 eine Curve γ_1^n der $n$ten Ordnung und deren [illegible] mit K_1^{mn}, also ist $y=mn^2$ oder $\mathfrak{K}^y$ ist von der [illegible] Curve liegen die Gruppen von

je r Punkten $BB' \ldots$, die den Punkten von K_1^{mm} entsprechen. Da aber die Punkte B auf K^m liegen, so liegen die Punkte $B' \ldots$ auf einer Curve $\mathfrak{K}^{m(n^2-1)}$ von der $m(n^2-1)$ten Ordnung, womit der obige Satz wieder bewiesen ist. — Die Curven $\mathfrak{K}^{m(n^2-1)}$ und K^m schneiden sich in $m^2(n^2-1)$ Punkten; $3m(n-1)$ sind die Schnittpunkte der *Hesse*schen Curve des Netzes von Curven C^n mit K^m; *dann bleiben auf K^m noch $\frac{1}{2}[m^2(n^2-1)-3m(n-1)]$ Paare von Punkten B', von denen jedes Paar zu einer Gruppe von $r-1$ Punkten $B' \ldots$ gehört. Ebensoviele Doppelpunkte hat K_1^{mm}.*

Die angegebenen Methoden lassen sich übrigens unmittelbar auf den Fall eines allgemeinen Curvennetzes ausdehnen, wenn man also davon absieht, dass die Curven $C^n \ldots$ durch $[\frac{1}{2}n(n+3)-2]$ feste Punkte gehen. Nennen wir die n^2 Grundpunkte eines jeden der im Netz vorkommenden Büschel, verbundene Grundpunkte, so heisst der allgemeine Satz:

> *Durchläuft ein Punkt eine Curve K^m der mten Ordnung, so durchlaufen die ihm verbundenen (n^2-1) Grundpunkte eine Curve der $m(n^2-1)$ten Ordnung.*

In Bezug auf Curven dritter Ordnung mag noch ein specieller Fall erwähnt werden. Sind von den 7 Grundpunkten $A_1, A_2, \ldots A_7$ eines Netzes von Curven dritter Ordnung 4, nämlich $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$, die Ecken und die anderen 3, $A_5\, A_6\, A_7$, die Diagonalpunkte eines Vierecks, so folgt vermittelst einer geometrischen (*Steiner*schen) Verwandtschaft, deren Hauptpunkte $A_5\, A_6\, A_7$ sind:

> *Bewegt sich ein Punkt B auf einer Curve K^m m-ter Ordnung, so bewegt sich der ihm verbundene Punkt B' auf einer Curve K^{2m} 2m-ter Ordnung, die $A_5\, A_6\, A_7$ zu m-fachen Punkten hat,* und
>
> *Bewegt sich ein Punkt B auf einer Curve des Netzes, so bewegt sich B' auf einer andern Curve des Netzes, und wenn B sich auf der letzteren bewegt, so bewegt sich B' auf der ersteren.*

Für die zweite in dem citirten Aufsatz behandelte Aufgabe hat inzwischen Herr *Reye* (cf. die Geometrie der Lage II. Theil Seite 246 ff.) eine andere Lösung gegeben.

Tilsit, im December 1873.

Ueber Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

In seiner Géométrie de Direction (Paris 1869) hat Herr *Paul Serret* zwei geometrische Beziehungen zwischen zehn Punkten einer Fläche zweiter Ordnung bewiesen, welche dem bekannten Theoreme entsprechen, dass zwei einem Kegelschnitt eingeschriebene Dreiecke allemal als Poldreiecke (oder Tripel conjugirter Punkte) eines Polarsystemes betrachtet werden können. Durch geometrische Betrachtungen gelangte ich, ohne Herrn *Serrets* Entdeckung zu kennen, zu denselben Sätzen und sogar zu demselben, sehr einfachen Beweis derselben. Es sei mir gestattet, diese Sätze in aller Kürze zu reproduciren, um eine Untersuchung der in ihnen auftretenden räumlichen Polfünfecke und Polsechsecke daran anzuschliessen.

Wie im räumlichen Polarsysteme jedes Tetraëder, dessen Eckpunkte die Pole der gegenüberliegenden Flächen sind, ein *Poltetraëder* genannt wird, ebenso soll heissen:

> „*Polfünfeck*" jedes räumliche Fünfeck im Polarsysteme, von dessen zehn Kanten jede durch den Pol der gegenüberliegenden Fläche geht, und:
>
> „*Polsechseck*" jedes räumliche Sechseck, von dessen zwanzig Flächen jede durch den Pol der gegenüberliegenden Fläche geht.

Die Zweckmässigkeit der Einführung dieser sich selbst conjugirten Fünf- und Sechsecke springt in die Augen, wenn die Directrix des Polarsystemes als die zweite Nullfläche eines Massensystemes betrachtet wird *).

Jedes vier-, fünf- oder sechspunktige Massensystem bildet ein Pol-

*) Vgl. meine Arbeit über „Trägheits- und höhere Momente eines Massensystemes" in diesem Journal Bd. 72 S. 293.

tetraëder, Polfünfeck resp. Polsechseck seiner zweiten Nullfläche; denn das zweite Moment des Systemes ist Null in Bezug auf jedes Ebenenpaar, welches die sämmtlichen Massenpunkte enthält. Auch kann jedes Massensystem hinsichtlich seiner Trägheitsmomente ersetzt werden durch vier, fünf oder sechs Massenpunkte, welche irgend ein Poltetraëder, Polfünfeck oder Polsechseck seiner zweiten Nullfläche bilden; für vier Punkte habe ich bereits a. a. O. S. 310 einen auch auf die übrigen beiden Fälle anwendbaren Beweis gegeben.

Die Gleichung der zweiten Nullfläche des Massensystemes, d. h. diejenige, welcher die Coordinaten α, β, γ, p jeder Berührungsebene der Nullfläche genügen müssen, ist:

$$\Sigma m_i r_i^2 = 0 \text{ oder } \Sigma m_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^2 = 0,$$

wenn $x_i\, y_i\, z_i$ die rechtwinkligen Coordinaten der Punktmasse m_i bezeichnen und r_i ihren Abstand von der Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$. Ist nun die Lage der Massen m_i gegeben, nicht aber ihre Grösse, so sind von den neun unabhängigen Coefficienten dieser (für α, β, γ, p quadratischen und homogenen) Gleichung noch drei, vier oder fünf unbestimmt, jenachdem die Anzahl der Punktmassen vier, fünf oder sechs ist. Also:

Bei der Bestimmung eines räumlichen Polarsystemes zählt ein gegebenes Poltetraëder, Polfünfeck oder Polsechseck für sechs, fünf, resp. vier unabhängige Bedingungen.

Zwei gegebene Polfünfecke oder ein Polfünfeck und ein Polsechseck zählen demnach zusammen für zehn Bedingungen, d. h. für eine mehr, als zur Bestimmung des räumlichen Polarsystemes ausreichen; folglich muss zwischen ihren zehn Eckpunkten eine Beziehung bestehen. Aus dem folgenden, zuerst von Hrn. *Paul Serret* gegebenen Beweise folgt, dass sie auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung liegen.

Die zehn Punkte $i = 0, 1, 2, \ldots . 9$ liegen auf einer F^2, wenn die aus ihren Coordinaten x_i, y_i, z_i gebildete Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_0^2 & y_0^2 & z_0^2 & y_0 z_0 & z_0 x_0 & x_0 y_0 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & y_9 z_9 & z_9 x_9 & x_9 y_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Die Gleichung $D=0$ ist ausserdem die nothwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, dass den zehn Punkten i solche Massen m_i beigelegt werden können, deren Summe indifferent ist hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente; denn nur wenn D verschwindet, ist die Gleichung:

$$\sum_{i=0}^{i=9} m_i r_i^2 = 0 \text{ oder } \sum_{i=0}^{i=9} m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^2 = 0$$

möglich für *alle* Werthe der Ebenencoordinaten α, β, γ, p, weil sie in die zehn für die m_i linearen und homogenen Gleichungen:

$$\Sigma m_i x_i^2 = 0, \; \Sigma m_i y_i^2 = 0, \; \Sigma m_i z_i^2 = 0, \; \Sigma m_i y_i z_i = 0, \cdots\cdots \Sigma m_i = 0$$

zerfällt. Aus je neun dieser zehn Gleichungen können die Massen m_i, abgesehen von einem constanten Factor, berechnet werden. Also:

Zehn beliebigen Punkten einer Fläche zweiter Ordnung können allemal Massen von solcher Grösse beigelegt werden, dass ihr Trägheitsmoment in Bezug auf jede Ebene des Raumes Null ist. Umgekehrt liegt jedes zehnpunktige räumliche Massensystem, welches indifferent ist hinsichtlich der Trägheitsmomente, auf einer Fläche zweiter Ordnung.

Zerlegen wir nun das zehnpunktige Massensystem in zwei, und ändern sodann in einem dieser beiden Systeme die Vorzeichen seiner Massen, so erhalten wir zwei aequivalente Massensysteme, deren Differenz das zehnpunktige indifferente ist. Diese aequivalenten Systeme haben identische zweite Nullflächen, bestimmen also ein und dasselbe räumliche Polarsystem. Ohne Weiteres folgt hieraus:

Zwei einer Fläche zweiter Ordnung beliebig eingeschriebene räumliche Fünfecke sind Polfünfecke eines durch sie bestimmten Polarsystemes. Wenn einer Fläche zweiter Ordnung ein Tetraëder und ein räumliches Sechseck beliebig eingeschrieben sind, so bilden dieselben ein Poltetraëder und ein Polsechseck eines durch sie bestimmten Polarsystemes.

Zehn beliebige Punkte einer F^2 können auf 126 verschiedene Arten in zwei Fünfecke und auf 210 Arten in ein Tetraëder und ein Sechseck zerlegt werden; sie bestimmen demnach nicht weniger als 336 Polarsysteme.

Man kann leicht umgekehrt beweisen, dass zwei beliebigen Polfünfecken eines räumlichen Polarsystemes oder einem Polsechseck und einem Poltetraëder allemal eine Fläche zweiter Ordnung umschrieben werden kann. Und weil den obigen Definitionen zufolge die Eckpunkte eines beliebigen Poltetraëders oder Polfünfecks mit jedem Punkte des Raumes ein Polfünfeck resp. Polsechseck bilden, so ergiebt sich hieraus der gleichfalls umkehrbare Satz:

Die Eckpunkte eines Poltetraëders und eines Polfünfecks irgend eines Polarsystemes können allemal durch eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species verbunden werden.

Ebenso ergiebt sich der bekannte Satz von *Hesse*, dass durch die acht Eckpunkte von zwei Poltetraëdern doppelt unendlich viele Flächen zweiter Ordnung gelegt werden können, nebst seiner Umkehrung. —

Wir wollen nun im Anschluss an diese Sätze *Serrets* diejenigen Bedingungen aufsuchen, welche hinreichen, um ein gegebenes Fünfeck oder Sechseck als Pol-n-eck eines räumlichen Polarsystemes zu kennzeichnen, zugleich aber Constructionen dieser sich selbst conjugirten n-Ecke angeben.

1. Zur Definition der Pol-n-ecke überhaupt, auch der Poltetraëder oder räumlichen Polvierecke, dient folgender Satz:

In einem räumlichen Pol-n-eck sind je zwei Ebenen, welche alle n Eckpunkte desselben enthalten, einander conjugirt.

Dieser Satz enthält aber nicht bloss eine Definition der Pol-n-ecke, sondern ausserdem für $n = 5$ oder 6 gewisse Eigenschaften derselben. Ein Polsechseck z. B. hat 20 Flächen, von denen jede ihrer Gegenfläche conjugirt ist, und doch zählt es bei der Bestimmung eines Polarsystemes nicht für zehn, sondern nur für vier unabhängige Bedingungen; wir müssen daraus schliessen, dass im räumlichen Polarsysteme jede Fläche eines Sechsecks ihrer Gegenfläche conjugirt ist, wenn Dasselbe von gewissen vier Sechseckflächen gilt.

2. Mit der obigen Definition verhält es sich ähnlich wie mit der folgenden:

Ein Viereck im ebenen Polarsysteme heisst ein Polviereck,

wenn von seinen sechs Seiten jede der gegenüberliegenden Seite conjugirt ist;

denn wenn zwei Paar Gegenseiten eines Vierecks einander conjugirt sind, so gilt bekanntlich das Gleiche von dem dritten Paare. Es folgt hieraus:

Wenn im räumlichen Polarsysteme irgend zwei von den Ebenen, welche die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks mit einer Geraden g verbinden, den resp. gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks conjugirt sind, so gilt Dasselbe von der dritten Ebene.

Weil nämlich die Gerade g zwei Dreiecksseiten conjugirt ist, so geht sie durch den Pol der Ebene ABC; ausserdem bilden der Schnittpunkt von g mit dieser Ebene und die drei Punkte ABC zusammen ein Polviereck eines ebenen Polarsystemes, welches zu dem räumlichen gehört. — Für das Polfünfeck folgt aus diesen Bemerkungen:

Drei beliebige Eckpunkte A, B, C eines Polfünfecks bilden mit demjenigen Punkte, in welchem ihre Ebene von der gegenüberliegenden Kante $\overline{DE}$ geschnitten wird, allemal ein ebenes Polviereck; und je zwei sich nicht schneidende Kanten desselben, wie $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$, sind einander conjugirt.

3. Die Sätze (2.) dienen ausserdem zum Beweise des folgenden bekannten Satzes:

Die vier Geraden, welche in einem räumlichen Polarsysteme die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraëders mit den resp. Polen A_1, B_1, C_1, D_1 ihrer Gegenflächen verbinden, liegen in einer Regelschaar oder sie schneiden sich paarweise in zwei Punkten, oder endlich sie gehen alle durch einen Punkt, jenachdem kein oder ein oder jedes Paar Gegenkanten des Tetraëders aus conjugirten Strahlen des Polarsystemes besteht.

Zunächst ist hervorzuheben, dass von den Tetraëdern $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ das erste zu dem zweiten dieselben Beziehungen hat, wie das zweite zum ersten; wie A_1 der Pol von BCD und $\overline{A_1B_1}$ die Polare von $\overline{CD}$, so ist auch A der Pol von $B_1C_1D_1$ und $\overline{AB}$ die Polare von $\overline{C_1D_1}$ u. s. w. Sei nun g die Schnittlinie der Ebenen AA_1D_1 und BB_1D_1, welche den resp. Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ des Dreiecks ABC conjugirt sind, weil sie deren Polaren $\overline{A_1D_1}$ und $\overline{B_1D_1}$ enthalten; dann ist (2.) die Ebene gC der

Dreiecksseite $\overline{AB}$ conjugirt und enthält deren Polare $\overline{C_1 D_1}$. Die durch D_1 gehende Gerade g schneidet folglich die vier Linien $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$, und ebenso geht durch jeden anderen Eckpunkt der beiden Tetraëder $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ eine Gerade, welche jene vier Linien schneidet. Im Allgemeinen gehören folglich $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ und $\overline{DD_1}$ einer Regelschaar an, von welcher g und sieben andere durch die Tetraëderecken gehende Gerade Leitstrahlen sind. Zwei jener vier Linien, z. B. $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ liegen nur dann in einer Ebene, wenn die Tetraëderkante $\overline{AB}$ von der Polare $\overline{A_1 B_1}$ ihrer Gegenkante $\overline{CD}$ geschnitten wird, wenn also die beiden Gegenkanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einander conjugirt sind; in diesem Falle aber müssen auch $\overline{CC_1}$ und $\overline{DD_1}$ in einer Ebene liegen. Aus dem Vorhergehenden aber ergiebt sich, dass alsdann die Schnittpunkte der beiden Geradenpaare $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ auf der Schnittlinie ihrer beiden Verbindungsebenen liegen müssen; denn sonst könnten diese vier Geraden nicht von g und den sieben anderen Strahlen zugleich geschnitten werden. Die beiden Schnittpunkte der Geradenpaare vereinigen sich folglich, wenn auch $\overline{AA_1}$ und $\overline{CC_1}$, sowie $\overline{BB_1}$ und $\overline{DD_1}$ sich schneiden, wenn also nicht bloss die Gegenkanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des Tetraëders $ABCD$ sondern noch zwei andere, $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, einander conjugirt sind. Unser Satz ist dadurch für jeden seiner drei Fälle bewiesen, zugleich aber der folgende:

> *Wenn zwei Paar Gegenkanten eines Tetraëders aus conjugirten Strahlen eines Polarsystemes bestehen, so sind auch die letzten beiden Gegenkanten einander conjugirt.*

4. Erwägt man, dass in einem Polfünfeck je zwei sich nicht schneidende Kanten einander conjugirt sind (2.), so gelangt man zu dem Schluss:

> *Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraëders gehören nur dann einem Polfünfeck an, wenn von den vier Geraden, durch welche sie mit den Polen ihrer resp. Gegenflächen verbunden werden, drei und folglich auch die vierte durch einen und denselben Punkt E gehen; denn nur in diesem Falle ist jede Kante des Tetraëders ihrer Gegenkante conjugirt. Der Punkt E bildet mit A, B, C, D zusammen das Polfünfeck.*

Nämlich jede durch E gehende Kante des Fünfecks (z. B. $\overline{EA}$) geht durch den Pol (A_1) ihrer Gegenfläche (BCD), und folglich muss auch

jede durch E gehende Fläche des Fünfecks die Polare ihrer Gegenkante enthalten.

5. Sind von den Eckpunkten eines Polfünfecks irgend drei A, B, C willkürlich angenommen, so können die übrigen beiden D und E construirt werden, wie folgt. Man verbinde A und C mit den Polaren der resp. Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$ durch zwei Ebenen und construire deren Schnittlinie g, welche mit der Fünfeckskante $\overline{DE}$ zusammenfällt (1.). Die Polare von $\overline{AC}$ liegt dann in der Ebene gB (2.), weshalb die Polare einer jeden anderen Geraden dieser Ebene von $\overline{AC}$ geschnitten wird. Man kann den Punkt D willkürlich auf g annehmen; der letzte Punkt E des gesuchten Polfünfecks ist alsdann der Schnittpunkt von g mit derjenigen Ebene, welche die Polare von $\overline{BD}$ mit der Geraden $\overline{AC}$ verbindet. Nämlich der Construction zufolge gehen von den vier Geraden, welche die Eckpunkte des Tetraëders $ACDE$ mit den Polen A', C', D', E' ihrer resp. Gegenflächen verbinden, drei ($\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$ und $\overline{DD'}$) durch B, und $ABCDE$ ist demnach (4.) ein Polfünfeck. Also:

> 6. *Um in einem Polarsysteme ein Polfünfeck zu construiren, kann man drei Eckpunkte A, B, C desselben willkürlich annehmen; die Gerade g, in welcher die übrigen beiden Eckpunkte D, E liegen, ist dadurch bestimmt, und auf ihr kann der vierte Eckpunkt D beliebig angenommen werden. Die Punkte D, E sind zugeordnete Punkte einer in g liegenden involutorischen Punktreihe.*

Die Richtigkeit der letzten Bemerkung folgt aus der Vertauschbarkeit der Punkte D und E sowie daraus, dass der Strahl $\overline{AD}$ und die ihm conjugirte Ebene BCE zwei projectivische Büschel beschreiben, wenn D die Punktreihe g durchläuft.

7. Zum Punkte E von g kann der zugeordnete Punkt D auch construirt werden, indem man irgend eine durch B (oder C) gehende Ebene, welche den Pol der Ebene EAC (resp. EAB) enthält, mit g zum Durchschnitt bringt. Hieraus und aus (5.) folgt:

> *Ein räumliches Fünfeck $ABCDE$ ist Polfünfeck eines Polarsystemes, wenn von drei aufeinanderfolgenden Flächen CDE, DEA und EAB desselben die ersten beiden ihren resp. Gegenkanten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ conjugirt sind die dritte aber irgend einer*

durch ihre Gegenkante $\overline{CD}$ gehenden, von CDE verschiedenen Ebene.

Aus diesem Satze geht wiederum hervor, dass ein Polfünfeck bei Bestimmung eines räumlichen Polarsystemes nur für fünf unabhängige Paare conjugirter Ebenen zählt. — Wir können erst recht sagen: „$ABCDE$ ist ein Polfünfeck, wenn die drei Flächen CDE, DEA, EAB ihren resp. Gegenkanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ conjugirt sind"; oder:

Wenn von einem einfachen räumlichen Fünfeck $ABCDE$ drei aufeinanderfolgende Kanten ihren resp. Gegenflächen conjugirt sind, so ist jede Kante und jede Diagonale desselben der ihr gegenüberliegenden Fläche resp. Diagonal-Ebene conjugirt.

8. Um auf Grund dieses Satzes ein Polfünfeck $ABCDE$ zu construiren, nehmen wir von den drei Flächen CDE, DEA und EAB desselben die ersten beiden ganz beliebig an und legen die dritte beliebig durch den Pol der ersten; diese drei Flächen schneiden sich in dem Punkte E. Wir wählen ferner den Punkt D beliebig auf der Schnittlinie der beiden ersten Ebenen und verbinden ihn mit dem Pole der dritten durch eine Gerade l_3; ebenso ziehen wir in der dritten Ebene durch den Pol der ersten eine beliebige Gerade l_1 und bringen diese mit der zweiten Ebene im Punkte A zum Durchschnitt. Legen wir endlich durch den Pol der zweiten Ebene eine Gerade l_2, welche mit l_3 einen Punkt C und mit l_1 einen Punkt B gemein hat, so ist $ABCDE$ ein Polfünfeck: denn die drei Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ oder l_1, l_2, l_3 gehen durch die Pole ihrer Gegenflächen. Auch bei dieser Construction können drei Eckpunkte z. B. D, E, A im Voraus willkürlich angenommen werden.

9. Wir wollen noch die Aufgabe lösen:

Ein gemeinschaftliches Polfünfeck $ABCDE$ von zwei gegebenen Polarsystemen zu construiren.

Wenn ein solches gemeinschaftliches Polfünfeck existirt, so enthält jede Kante desselben die Pole ihrer Gegenfläche und jede Fläche die Polaren ihrer Gegenkante in Bezug auf beide Polarsysteme. Nehmen wir also eine Fläche φ_1, z. B. die Fläche CDE, willkürlich an, so fällt deren Gegenkante $\overline{AB}$ mit der Verbindungslinie l_1 der beiden Pole von φ_1 zusammen. Durch l_1 legen wir beliebig eine andere Fläche φ_2 oder EAB

und verbinden deren Pole durch eine Gerade l_3, welche mit der Gegenkante $\overline{CD}$ von φ_3 zusammenfällt. In l_1 nehmen wir sodann den Punkt B willkürlich an und bestimmen in l_3 den Punkt C so, dass die beiden Polaren der Geraden $\overline{BC}$ oder l_2 in einer Ebene φ_2 liegen. Dieses ist im Allgemeinen auf zwei verschiedene Arten möglich; denn dem Strahlenbüschel, welcher aus B die Punktreihe l_3 projicirt, entsprechen in den beiden Polarsystemen zwei projectivische Strahlenbüschel, von denen im Allgemeinen zwei Paare homologer Strahlen aus sich schneidenden Geraden bestehen. Bringen wir endlich die Ebene φ_2 mit den Geraden l_1, l_3 und $\overline{\varphi_1\varphi_3}$ zum Durchschnitt in den resp. Punkten A, D und E, so ist $ABCDE$ ein gemeinschaftliches Polfünfeck der beiden Polarsysteme; denn die drei Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ oder l_1, l_2, l_3 gehen durch die Pole ihrer resp. Gegenflächen φ_1, φ_2, φ_3.

10. Durch die Wahl des Punktes B auf l_1 sind die Punkte A und E der resp. Geraden l_1 und $\overline{\varphi_1\varphi_3}$ völlig bestimmt; denn A und E liegen mit den Polen der Ebene Bl_3 oder BCD in einer Geraden. — Durch passende Wahl der Ebene φ_1 kann man auf unendlich viele Arten bewirken, dass der Eckpunkt A mit einem gegebenen Punkte zusammenfällt. Also:

Zwei räumliche Polarsysteme besitzen unendlich viele gemeinschaftliche Polfünfecke; jede gegebene Ebene φ_1 ist Fläche und jeder Punkt A ist Eckpunkt von unendlich vielen derselben.

Es lässt sich zeigen, dass durch die 10 Eckpunkte von zwei beliebigen dieser Polfünfecke allemal eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species gelegt werden kann; haben die beiden Polfünfecke einen gemeinschaftlichen Eckpunkt, so kann ihnen sogar eine Raumcurve dritter Ordnung umschrieben werden. Aus früheren Untersuchungen über den Strahlencomplex zweiten Grades, welchem die Kanten aller jener gemeinschaftlichen Polfünfecke angehören, ergiebt sich noch:

Die unendlich vielen Gruppen von je vier Punkten, welche mit einem beliebigen Punkte A je ein gemeinschaftliches Polfünfeck von zwei gegebenen Polarsystemen bilden, liegen auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt A ist, und welche auch

dem gemeinschaftlichen Poltetraëder der beiden Polarsysteme umschrieben ist.

Ein Fünfeck, welches von zwei Flächen F^2 und F_1^2 zweiter Ordnung Polfünfeck ist, ist zugleich Polfünfeck jeder Fläche der durch F^2 und F_1^2 bestimmten Flächenschaar zweiter Ordnung. Denn bekanntlich liegen die Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf die Flächen der Schaar sämmtlich in einer Geraden.

11. Den Schluss dieser Sätze über das Polfünfeck möge folgende Notiz bilden:

Einem Fünfeck kann auf unendlich viele Arten ein Fünfflach (System von fünf Ebenen) so eingeschrieben werden, dass die 10 *Eckpunkte desselben beziehungsweise auf den* 10 *Kanten des Fünfecks und seine* 10 *Kanten in den resp.* 10 *Flächen des Fünfecks liegen.*

Construirt man nämlich in einem der unendlich vielen Polarsysteme, von welchen das Fünfeck ein Polfünfeck ist, die Polar-Ebenen der fünf Eckpunkte, so bilden dieselben ein solches Fünfflach. Man kann ein solches Fünfflach auch direct construiren, indem man die erste Ebene desselben ganz beliebig annimmt und eine zweite durch eine der hierdurch bestimmten Kanten willkürlich hindurchlegt; ordnet man hernach jeder Fläche des Fünfflaches denjenigen Eckpunkt des Fünfeckes zu, dessen Kanten keinen in jener Fläche liegenden Eckpunkt des Fünfflaches enthalten, so ist dadurch umgekehrt eines jener unendlich vielen Polarsysteme bestimmt. Den Beweis dieser Behauptung übergehen wir der Kürze wegen.

In einem Fünfflach liegt jeder Kante, d. h. jeder Schnittlinie von zwei der fünf Flächen, derjenige Eckpunkt gegenüber, in welchem die übrigen drei Flächen sich schneiden. Wir können nun ein Fünfflach im Polarsysteme, dessen 10 Kanten den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten conjugirt sind, ein *Polfünfflach* nennen, und erhalten den Satz:

Im Polarsysteme ist jedem Polfünfeck ein ihm eingeschriebenes Polfünfflach zugeordnet.

12. Wir wenden uns nunmehr zu dem *Polsechseck.* Wir wollen zwei Eckpunkte E, F desselben absondern und die übrigen vier A, B, C, D

als Eckpunkte eines Tetraëders auffassen. Jede Fläche dieses Tetraëders (z. B. BCD) ist dann der Ebene conjugirt, welche den gegenüberliegenden Eckpunkt (A) mit der Geraden $\overline{EF}$ verbindet; und folglich wird $\overline{EF}$ von den vier Geraden geschnitten, welche die Eckpunkte A, B, C, D des Tetraëders mit den Polen A_1, B_1, C_1, D_1 ihrer resp. Gegenflächen verbinden.

Wenn nun in dem Polarsysteme jede Kante des Tetraëders ihrer Gegenkante conjugirt ist, so muss $\overline{EF}$ durch denjenigen Punkt gehen, welcher mit A, B, C, D zusammen ein Polfünfeck bildet (3., 4.); und nimmt man F beliebig an, so fällt E mit jenem Punkte zusammen. Wirklich bildet ein Polfünfeck mit jedem sechsten Punkte des Raumes ein Polsechseck.

Sind nur zwei Gegenkanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des Tetraëders einander conjugirt, so liegt $\overline{AA_1}$ mit $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ mit $\overline{DD_1}$ in einer Ebene, und die Schnittlinie dieser beiden Ebenen geht durch die Schnittpunkte der beiden Geradenpaare (3.). In einer der beiden Ebenen muss deshalb auch die Linie $\overline{EF}$, welche alle vier Geraden scheidet, enthalten sein, sodass entweder A und B oder C und D mit E und F in einer Ebene liegen. Das räumliche Sechseck ist in diesem Falle ein uneigentliches; wir werden weiter unten (18.) von diesen uneigentlichen Polsechsecken das Nöthige angeben.

13. Wir haben jetzt nur noch den allgemeinen Fall zu untersuchen, in welchem keine Kante des Tetraëders $ABCD$ ihrer Gegenkante conjugirt ist. Die Geraden $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}, \overline{DD_1}$ liegen in diesem Fall in einer Regelschaar (3.) und $\overline{EF}$ *muss ein Leitstrahl dieser Schaar sein.*

Wenn eine Gerade g drei Strahlen der Regelschaar schneidet, so muss sie auch jeden vierten Strahl derselben schneiden. Wir erhalten deshalb folgenden, auch für die speciellen Fälle (12.) gültigen Satz:

> *Wenn aus einer Axe g drei Eckpunkte eines Tetraëders durch Ebenen projicirt werden, welche den resp. gegenüber liegenden Tetraëderflächen conjugirt sind, so gilt Dasselbe von dem vierten Eckpunkte.*

Wir wollen von einer Axe g, deren Verbindungsebenen mit den Eckpunkten eines Tetraëders zugleich die Pole der resp. Gegenflächen enthalten, sagen, sie sei *dem Tetraëder conjugirt.* Einem beliebigen Tetraëder $ABCD$

sind im Polarsysteme unendlich viele Axen conjugirt; dieselben bilden im Allgemeinen eine Regelschaar (die Leitschaar von $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$), und zu ihnen gehört die Verbindungslinie jedes Punktenpaares E, F, welches das Tetraëder zu einem Polsechsecke ergänzt.

14. Sind von einem Tetraëder drei Eckpunkte A, B, C und eine ihm conjugirte Axe g gegeben, so erhält man den vierten Eckpunkt D, indem man die Pole der Ebenen gA, gB, gC mit den resp. Geraden $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ durch Ebenen verbindet und diese zum Durchschnitt bringt. Zugleich liegt D in derjenigen Ebene φ, welche den Pol der Ebene ABC mit g verbindet. Für unsere Zwecke ist nun die Frage von Wichtigkeit: „Wie bewegt sich dieser vierte Eckpunkt D, wenn die Axe g in der Ebene φ verschoben wird?"

Wenn sich die Axe g um einen auf ihr liegenden Punkt E dreht, also in φ einen Strahlenbüschel E beschreibt, so beschreiben die Ebenen gA, gB und gC drei zu E perspectivische Ebenenbüschel, und folglich die Verbindungsebenen ihrer Pole von den resp. Geraden $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ drei projectivische Ebenenbüschel. Von diesen letzteren Büscheln aber fallen drei homologe Ebenen mit ABC zusammen, wenn g bei der Drehung um E den in φ liegenden Pol von ABC überschreitet; die Ebenenbüschel $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ sind folglich perspectivisch und erzeugen paarweise einen gewöhnlichen Strahlenbüschel. Der Punkt D als Schnittpunkt von je drei homologen Ebenen dieser Büschel durchläuft demnach in φ eine Gerade l, wenn die Axe g in φ sich dreht um den auf ihr liegenden Punkt E.

Bei dieser Drehung fällt g einmal in die Ebene EAB; um für diese besondere Lage den zugehörigen Punkt D zu finden, verbinden wir den Pol der Ebene EAB mit $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$, und bringen die Schnittlinie der beiden Verbindungs-Ebenen, d. h. die Gerade, welche jenen Pol mit C verbindet, zum Durchschnitt mit der Ebene φ. Der Schnittpunkt muss auf l liegen, und ebenso wird l von denjenigen beiden Geraden geschnitten, welche die Pole der Ebenen EBC und ECA mit resp. A und B verbinden. Die Axe l ist folglich dem Tetraëder $ABCE$ conjugirt, oder wenn g jetzt ganz beliebig in φ verschoben wird, so fällt D auf E, sobald g mit l zur Deckung gebracht wird. Der Punkt D und die zugehörige Axe

g sind demnach zugeordnete Elemente (Pol und Polare) eines in φ-liegenden ebenen Polarsystemes, welches übrigens nicht dem gegebenen räumlichen Polarsysteme angehört.

15. Um nun zwei Punkte E, F zu construiren, welche mit vier gegebenen A, B, C, D ein Polsechseck des räumlichen Polarsystemes bilden, legen wir durch D eine beliebige Gerade l und bestimmen (14.) den Punkt E so, dass die Axe l dem Tetraëder $ABCE$ conjugirt ist. In der Ebene El, welche den Pol von ABC enthält, bestimmen wir sodann die zum Tetraëder $ABCD$ conjugirte Axe g; dieselbe geht durch E (14.) und schneidet die Axe l in einem Punkte F. Da die Axe $\overline{DE}$ dem Tetraëder $ABCF$ conjugirt ist (14.), so muss das Sechseck $ABCDEF$ ein Polsechseck sein; denn jede durch eine der Geraden $\overline{DE}$, g, l, oder $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ gehende Fläche des Sechsecks, also überhaupt jede Fläche desselben, ist ihrer Gegenfläche conjugirt.

Den Schlusssatz der vorigen Nummer (14.) können wir nunmehr auch wie folgt aussprechen:

> *Wenn von einem Polsechseck drei Eckpunkte A, B, C und diejenige Ebene φ gegeben sind, welche der Fläche ABC gegenüber liegt, so bilden die übrigen drei Eckpunkte D, E, F ein beliebiges Poldreieck eines in φ liegenden Polarsystemes, welches durch A, B, C und das gegebene räumliche Polarsystem völlig bestimmt ist.*

Wenn eine Gerade g von φ mit einer Seite (AB) des gegebenen Dreiecks ABC in einer Ebene liegt, und wir den Pol dieser Ebene mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte (C) des Dreiecks verbinden, so erhalten wir eine Gerade, welche den Pol von g hinsichtlich des in φ liegenden ebenen Polarsystemes enthält. Das letztere ist auf Grund dieser Bemerkung leicht bestimmbar.

16. Aus der soeben (15.) angegebenen Construction geht hervor, dass ein Polsechseck völlig bestimmt ist, wenn von demselben vier Eckpunkte A, B, C, D gegeben sind sowie eine durch D gehende Gerade l, auf welcher ein fünfter Eckpunkt F liegen soll. Legen wir durch $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ zwei den resp. Ebenen lC und lA conjugirte Ebenen, so schneiden sich diese in einer durch B gehenden Geraden l_1, welche den sechsten

Eckpunkt E enthält. Am Einfachsten erhält man E und F, indem man mit l_1 und l diejenigen beiden durch $\overline{AC}$ gehenden Ebenen zum Durchschnitt bringt, welche den resp. Ebenen lB und l_1D conjugirt sind. Eine zweite Construction von E und F ergiebt sich aus der folgenden Erwägung: Verbinden wir einen beweglichen Punkt P der Geraden l_1 mit $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ durch Ebenen und suchen zu diesen die durch resp. $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gehenden conjugirten Ebenen, so wird deren Schnittlinie die Gerade l in F schneiden, sobald P mit E zusammenfällt. Die Schnittlinie beschreibt eine durch $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gehende Kegelfläche zweiter Ordnung, schneidet also noch bei einer zweiten Lage E' des beweglichen Punktes P die Linie l in einem Punkte F'; und diese zweite Construction liefert uns also zwei Punktenpaare, von denen nur das eine mit A, B, C, D ein Polsechseck bildet. Aus beiden Constructionen folgt:

Wenn im Polarsystem vier von den sechs Ebenen, durch welche die Kanten eines Tetraëders $ABCD$ aus einem Punkte E projicirt werden, denjenigen Ebenen conjugirt sind, welche ihre resp. Gegenkanten mit dem Punkte F verbinden, so bilden im Allgemeinen die Punkte A, B, C, D, E, F ein Polsechseck, und es werden je zwei Gegenkanten des Tetraëders aus resp. E und F durch conjugirte Ebenen projicirt. Eine Ausnahme kann nur dann eintreten, wenn die in den ersten vier Ebenen liegenden Kanten ein einfaches windschiefes Viereck bilden.

Man entscheidet leicht, ob im genannten Falle die Ausnahme wirklich eintritt oder nicht; wenn nämlich irgend eine Fläche des Tetraëders derjenigen Ebene conjugirt ist, welche den gegenüberliegenden Eckpunkt mit $\overline{EF}$ verbindet, so tritt die Ausnahme *nicht* ein und $ABCDEF$ ist ein Polsechseck.

Der obige, für die Polsechsecke fundamentale Satz bestätigt unsere frühere Bemerkung, dass bei Bestimmung eines Polarsystemes jedes gegebene Polsechseck nur für vier unabhängige Paare conjugirter Ebenen zählt.

17. Die Gerade $\overline{EF}$ oder g ist (13.) ein Leitstrahl der Regelschaar $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}, \overline{DD_1}$, liegt also auf einer dem Tetraëder $ABCD$ umschriebenen und durch dasselbe im Polarsysteme völlig bestimmten Fläche Φ

zweiter Ordnung; die Gerade $\overline{DF}$ oder l dagegen haben wir ganz beliebig durch den Punkt D gelegt. Der Punkt F kann deshalb als ein ganz beliebiger Punkt der Fläche Φ betrachtet werden. — Also:

Um zwei Punkte E, F zu finden, welche mit den Eckpunkten eines beliebigen Tetraëders ein Polsechseck bilden, verbinde man drei dieser Eckpunkte A, B, C, D mit den Polen ihrer resp. Gegenflächen und construire irgend eine Gerade g, welche diese drei Verbindungslinien schneidet; auf g wähle man den Punkt F beliebig und bestimme sodann den Punkt E so auf g, dass die Ebenen CDE und FAB einander conjugirt sind. Die so gefundenen Punkte E und F sind zugeordnete Punkte einer in g liegenden involutorischen Punktreihe.

Die Richtigkeit der letzten Bemerkung folgt sowohl aus (15.) als auch daraus, dass E und F mit einander vertauscht werden können und dass, wenn F sich auf g verschiebt, die conjugirten Ebenen CDE und FAB zwei projectivische Büschel beschreiber.

18. Zu derjenigen Regelschaar der Fläche Φ, welche die Gerade $\overline{EF}$ oder g enthält, gehört auch die Verbindungslinie g_1 von je zwei solchen Punkten, welche mit A, B, C ein Polfünfeck und folglich mit A, B, C, D ein Polsechseck bilden; g_1 aber ist durch die Punkte A, B, C völlig bestimmt. Aehnlich wie $ABCD$ bestimmt auch das Tetraëder $ABCE$ eine Fläche Φ_1 zweiter Ordnung, auf welcher $\overline{DF}$ liegt; dieselbe hat mit Φ die Gerade g_1 gemein und folglich ausserdem eine durch A, B, C, D, E, F gehende Raumcurve dritter Ordnung. Also:

Die Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die Eckpunkte eines Polsechsecks gelegt werden kann, ist auf jeder, durch vier dieser Eckpunkte im Polarsysteme bestimmten Fläche Φ zweiter Ordnung enthalten.

Wenn insbesondere F in der Ebene ABC liegt, so muss demnach diese Raumcurve zerfallen in die Gerade $\overline{DE}$ und den Kegelschnitt, welchen Φ mit der Ebene ABC gemein hat. Und weil den Ebenen DEF und DEA die alsdann identischen Ebenen ABC und BCF conjugirt sind, so enthält $\overline{DE}$ den Pol D_1 von ABC; die vier Punkte B, C, D, E bilden folglich ein Tetraëder, in welchem die beiden Gegenkanten $\overline{BC}$ und $\overline{DE}$

einander conjugirt sind. Ueberhaupt haben wir es in diesem Falle mit dem uneigentlichen Polsechseck zu thun, welches uns schon früher (12.) aufgestossen ist.

19. Sind E, F und E_1, F_1 zwei verschiedene Punktenpaare, welche mit A, B, C, D Polsechsecke bilden, so liegen die beiden Raumcurven k^3 und k_1^3 dritter Ordnung, durch welche sie mit A, B, C, D verbunden werden können, beide auf Φ, und haben $\overline{EF}$, $\overline{E_1F_1}$ und überhaupt alle zum Tetraëder $ABCD$ conjugirten Geraden zu gemeinschaftlichen Secanten. Die Curve k^3 bildet deshalb mit $\overline{E_1F_1}$ und ebenso k_1^3 mit $\overline{EF}$ eine specielle Raumcurve vierter Ordnung erster Species, und die acht Punkte $A, B, C, D, E, F, E_1, F_1$ stellen sich dar als Schnittpunkte von zwei solchen Raumcurven vierter Ordnung. Also:

Je zwei Punktenpaare E, F und E_1, F_1, welche mit vier gegebenen Punkten A, B, C, D zwei verschiedene Polsechsecke ausmachen, bilden mit diesen zusammen die Knotenpunkte eines Flächenbündels zweiter Ordnung.

Weil durch sieben dieser Knotenpunkte der achte völlig bestimmt ist, so ergiebt sich umgekehrt:

Jede nicht auf der Fläche Φ liegende Raumcurve vierter Ordnung erster Species, welche dem Polsechseck $ABCDEF$ umschrieben ist, wird von Φ in noch zwei Punkten E_1, F_1 geschnitten, welche mit $ABCD$ ein zweites Polsechseck bilden.

20. Construiren wir in einem der fünffach unendlich vielen Polarsysteme, von welchen ein gegebenes Sechseck Polsechseck ist, zu den Eckpunkten die sechs Polarebenen und damit zu dem Sechseck das zugeordnete Sechsflach, so erhalten wir eine von den unendlich vielen Lösungen der Aufgabe:

Einem gegebenen räumlichen Sechseck ein Sechsflach in der Weise einzuschreiben, dass jede von den 20 Flächen des ersteren einen von den 20 Eckpunkten des letzteren enthält.

Im Polarsysteme ist jedem Polsechseck ein in dieser Weise ihm eingeschriebenes Polsechsflach zugeordnet,

nämlich ein Sechsflach, von welchem je zwei gegenüberliegende Eckpunkte

(die nicht einer und derselben Fläche angehören) einander conjugirt sind. Die directe Lösung obiger Aufgabe ist nicht schwierig; sie führt zur Bestimmung eines derjenigen Polarsysteme, von welchen das gegebene Sechseck ein Polsechseck ist, wenn man den Satz (2.) beachtet: „Die drei Ebenen, welche die Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks ABC mit den Polaren ihrer resp. Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einer Geraden."

21. Wir wollen nunmehr die Aufgabe lösen:

Ein gemeinschaftliches Polsechseck $ABCDEF$ von drei beliebig gegebenen Polarsystemen zu construiren.

Dass solche gemeinschaftliche Polsechsecke existiren, ist leicht nachzuweisen. Nämlich je zwei der gegebenen drei Polarsysteme besitzen ein gemeinschaftliches Poltetraëder, und bestimmt man irgend zwei Punkte, welche die Eckpunkte dieses Tetraëders zu einem Polsechseck des dritten Polarsystemes ergänzen, so hat man ein gemeinschaftliches Polsechseck der drei Systeme.

Ist von dem gesuchten Polsechseck eine Fläche φ gegeben, so ist dadurch die gegenüber liegende Fläche φ_1 im Allgemeinen völlig bestimmt; denn φ_1 muss die drei Pole von φ enthalten. Dreht sich φ um eine Kante k des Polsechsecks, so beschreiben die Pole von φ drei projectivische Punktreihen und folglich jene dreifach der φ conjugirte Ebene φ_1 einen Ebenenbüschel dritter Ordnung; zu diesem Ebenenbüschel müssen auch die vier Flächen des Tetraëders gehören, welches von den vier ausserhalb k gelegenen Eckpunkten des Polsechsecks gebildet wird. Die Kanten dieses Tetraëders gehören folglich zu dem Axensystem des Ebenenbüschels dritter Ordnung, d. h. zu dem System von solchen Geraden, in welchen je zwei Ebenen dieses Büschels sich schneiden. Als bekannt setzen wir voraus *), dass alle Axen des Ebenenbüschels dritter Ordnung, welche eine Ebene desselben in den Punkten einer Geraden g schneiden, im Allgemeinen eine Regelschaar bilden, und nur dann einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, wenn g selbst eine Axe ist.

22. Es seien nun von dem gesuchten gemeinschaftlichen Polsechs-

*) Man vergl. meine Geometrie der Lage, 2. Abth. p. 73 u. 77.

eck der drei Polarsysteme gegeben die Kante k und zwei durch k gehende Flächen φ und χ. Wir construiren zu letzteren die resp. Gegenflächen φ_1 und χ_1 (21.), welche sich in einer Kante k_1 des Polsechsecks schneiden werden. Wir suchen sodann zu der Ebene ψ, welche k mit einem beliebigen Punkte A von k_1 verbindet, diejenige Ebene ψ_1, welche die drei Pole von ψ enthält, und bestimmen die Durchschnittspunkte B, C, D dieser Ebene ψ_1 mit den resp. Geraden k_1, $\overline{\varphi\chi_1}$ und $\overline{\chi\varphi_1}$. Dann ist (13.) die Gerade k dem Tetraëder $ABCD$ in jedem der drei Polarsysteme conjugirt, weil den drei Ebenen φ, χ, ψ, durch welche die resp. Eckpunkte C, D, A des Tetraëders aus k projicirt werden, die gegenüberliegenden Tetraëderflächen φ_1, χ_1, ψ_1 dreifach conjugirt sind. Folglich sind die Ebenen CDA und CDB den resp. Ebenen kB und kA conjugirt, und CD sowie jede andere Kante des Tetraëders $ABCD$ ist eine Axe desjenigen Büschels dritter Ordnung, dessen Ebenen denjenigen des Büschels k erster Ordnung dreifach conjugirt sind. Wenn der Punkt A auf k verschoben wird, so beschreibt demnach $\overline{CD}$ diejenige Regelschaar R, welche alle, die Ebene φ in der Geraden $\overline{\varphi\chi_1}$ schneidenden Axen dieses Ebenenbüschels dritter Ordnung enthält (21.).

Damit nun das Tetraëder $ABCD$ mit zwei auf k liegenden Punkten E, F ein gemeinsames Polsechseck der drei Polarsysteme bilde, muss $\overline{CD}$ zugleich eine Axe des Büschels dritter Ordnung sein, dessen Ebenen denjenigen von $\overline{AB}$ oder k_1 dreifach conjugirt sind. Nun bilden aber dem Vorhergehenden zufolge alle Axen dieses Büschels dritter Ordnung, welche die Ebene χ_1 in der Geraden $\overline{\varphi\chi_1}$ schneiden, ebenfalls eine Regelschaar R_1. Die beiden Schaaren R und R_1 haben die beiden Geraden $\overline{\varphi\chi_1}$ und $\overline{\chi\varphi_1}$ zu Leitstrahlen, sie besitzen folglich auch zwei gemeinschaftliche Strahlen k_2. Lassen wir CD mit einem dieser Strahlen k_2 zusammenfallen, so erhalten wir die Punkte E und F, indem wir durch k_2 eine Ebene ω legen, welche einer durch k_1 oder $\overline{AB}$ gehenden Ebene ω_1 dreifach conjugirt ist (was auf zweierlei Art ausführbar ist), und sodann k mit resp. ω und ω_1 zum Durchschnitt bringen. In der That sind die Ebenen φ, χ, ψ, ω, durch welche die Kanten $\overline{FC}$, $\overline{FD}$, $\overline{FA}$, $\overline{CD}$ des Tetraëders $ACDF$ aus dem Punkte E projicirt werden, in jedem der drei Polarsysteme conjugirt

zu den resp. Ebenen $\varphi_1, \chi_1, \psi_1, \omega_1$, durch welche die gegenüberliegenden vier Tetraëderkanten $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AF}$ aus dem Punkte B projicirt werden, und der Satz (16.) ist somit anwendbar.

Aus dieser Construction folgt:

Drei beliebig gegebene Polarsysteme haben unendlich viele Polsechsecke mit einander gemein; man erhält zwei derselben, wenn man eine Kante k und zwei durch k gehende Flächen φ und χ des Sechsecks willkürlich annimmt.

Bekanntlich liegen die Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf eine Schaar-Schaar von Flächen zweiter Ordnung sämmtlich in einer zweiten Ebene. Also:

Ein gemeinschaftliches Polsechseck von drei beliebigen Flächen F^2, F_1^2, F_2^2 zweiter Ordnung ist zugleich Polsechseck von jeder anderen Fläche zweiter Ordnung, welche der durch F^2, F_1^2 und F_2^2 bestimmten Schaar-Schaar angehört.

23. Ohne Beweis notiren wir noch folgende Sätze:

Zwei gemeinschaftlichen Polfünfecken von zwei verschiedenen Polarsystemen kann allemal eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species umschrieben werden, und sogar eine Raumcurve dritter Ordnung, wenn irgend zwei Eckpunkte derselben zusammenfallen.

Zwei gemeinschaftlichen Polsechsecken von drei beliebigen Polarsystemen kann allemal eine Fläche zweiter Ordnung umschrieben werden, und sogar eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species, wenn sie einen Eckpunkt mit einander gemein haben.

Drei beliebig gegebene Polarsysteme haben unendlich viele Polfünfecke gemein; die Eckpunkte derselben liegen sämmtlich auf einer Raumcurve dritter Ordnung.

Vier beliebige Polarsysteme haben unendlich viele Polsechsecke und ein Polfünfeck mit einander gemein; die sämmtlichen Flächen derselben berühren eine Fläche vierter Classe, auf welcher die Kanten des Polfünfecks liegen. Jeder Punkt des Raumes ist Eckpunkt von unendlich vielen solchen Polsechsecken; die Eckpunkte derselben liegen auf einer dem Polfünfeck umschriebenen Raumcurve dritter Ordnung.

Zwei beliebige von diesen gemeinschaftlichen Polsechsecken sind allemal einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species eingeschrieben; ihre 12 Eckpunkte können mit denjenigen des Polfünfecks durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden.

Strassburg i. E., Juni 1873.

Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie.

(Von Herrn *F. Mertens* in Krakau.)

Den Gegenstand der folgenden Abhandlung bildet eine Reihe von Aufgaben, welche die bei gewissen zahlentheoretischen Functionen in Betracht kommenden asymptotischen Ausdrücke betreffen.

Die zwei ersten dieser Aufgaben sind bereits von *Dirichlet**) behandelt worden. Ich glaubte aber noch einmal darauf zurückkommen zu dürfen, einerseits, weil meine Behandlung dieser Aufgaben mir directer und einfacher zu sein schien, andererseits, weil die Abweichung von dem asymptotischen Ausdrucke schärfer begrenzt werden konnte.

1.

Es sei φn die Anzahl aller in der Reihe $1, 2, \ldots n$ vorkommenden Zahlen, welche zu n theilerfremd sind; man soll den asymptotischen Ausdruck der Summe $\sum_m^{G}\!{}_1 \varphi m$ für grosse Werthe von G finden.

Bezeichnet μn eine derart von n abhängige Zahl, dass $\mu n = 0$ ist, wenn n quadratische Theiler (ausser 1) zulässt, sonst aber den Werth $+1$ oder -1 besitzt, je nachdem n aus einer geraden (der Fall $n=1$ gehört hierher) oder ungeraden Anzahl verschiedener Primfactoren zusammengesetzt ist, und ist m in seine Primfactoren zerlegt $= a^{\alpha} b^{\beta} \ldots$, so wird φm bekanntlich durch die Formel

$$\varphi m = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots$$
$$= \Sigma \mu T \frac{m}{T},$$

gegeben, wo die Summation über alle Theiler T von m zu erstrecken ist.

*) Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie, Abhandlungen der Berliner Akademie, Jahrgang 1849.

Es werde in dieser Formel der Reihe nach

$$m = 1, 2, 3, \ldots [G]$$

gesetzt und hierauf die Summe aller auf diese Weise entstandenen Gleichungen gebildet; unter $[x]$ soll hier und überall im Folgenden die grösste in x enthaltene ganze Zahl verstanden werden. Um das Resultat übersichtlich zu ordnen, reicht es hin, die von

$$\varphi n, \quad \varphi 2n, \quad \ldots \quad \varphi\left[\frac{G}{n}\right]n$$

herrührenden Glieder

$$\mu n, \quad 2\mu n, \quad \ldots \quad \left[\frac{G}{n}\right]\mu n,$$

welche ausschliesslich mit dem Factor μn behaftet sind, zu einem Gesammtgliede $\frac{1}{2}\mu n\left(\left[\frac{G}{n}\right]^2 + \left[\frac{G}{n}\right]\right)$ zu vereinigen. Hiernach ergiebt sich

$$\sum_1^G{}_m \varphi m = \tfrac{1}{2}\sum_1^G{}_n \mu n \left(\left[\frac{G}{n}\right]^2 + \left[\frac{G}{n}\right]\right).$$

Setzt man nun allgemein

$$\left[\frac{G}{n}\right] = \frac{G}{n} - r_n,$$

so wird

$$\tfrac{1}{2}\left(\left[\frac{G}{n}\right]^2 + \left[\frac{G}{n}\right]\right) = \tfrac{1}{2}\,\frac{G^2}{n^2} + (\tfrac{1}{2} - r_n)\frac{G}{n} - \tfrac{1}{2}\, r_n (1 - r_n)$$

und

$$\sum_1^G{}_m \varphi m = \tfrac{1}{2}\, G^2 \sum_1^\infty{}_n \frac{\mu n}{n^2} + \varDelta,$$

wo

$$\varDelta = -\tfrac{1}{2}\, G^2 \sum_{1+[G]}^\infty{}_n \frac{\mu n}{n^2} + G \sum_1^G{}_n \frac{\mu n}{n}(\tfrac{1}{2} - r_n) - \tfrac{1}{2}\sum_1^G{}_n \mu n\, r_n (1 - r_n).$$

Es ist aber, wenn $\mathfrak{C}$ die *Euler*sche Constante $0{,}57721\ldots$ bezeichnet,

$$\sum_{1+[G]}^\infty{}_n \frac{\mu n}{n^2} < \sum_{1+[G]}^\infty{}_n \frac{1}{n^2} < \frac{1}{G} + \frac{1}{G^2},$$

$$\sum_1^G{}_n \frac{\mu n}{n}(\tfrac{1}{2} - r_n) < \tfrac{1}{2}\sum_1^G{}_n \frac{1}{n} < \tfrac{1}{2}(\log G + \mathfrak{C} + \frac{1}{G}),$$

$$\sum_1^G{}_n \mu n\, r_n (1 - r_n) < \tfrac{1}{4}\, G$$

und nach *Euler* (Introd. in Anal. inf. Lib. I Cap. XV. 277)

$$\sum_1^\infty \frac{\mu n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Man findet daher

$$\sum_1^G {}_m \varphi m = \frac{3}{\pi^2} G^2 + \Delta,$$

wo ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\Delta < (\tfrac{1}{2} \log G + \tfrac{1}{2} \mathfrak{C} + \tfrac{5}{8}) G + 1.$$

Die hier gegebene obere Grenze für den Unterschied Δ ist genauer als diejenige, welche man in der erwähnten Abhandlung von *Dirichlet* findet. Dort wird nämlich nur gezeigt, dass Δ von keiner höheren als der Ordnung G^γ sein kann, wo γ aus der Gleichung

$$1 = \frac{1}{2^\gamma} + \frac{1}{3^\gamma} + \frac{1}{4^\gamma} + \cdots \textit{in inf.}$$

zu bestimmen ist und grösser als $\frac{3}{2}$ ausfällt, während in Wirklichkeit Δ höchstens von der Ordnung $G \log G$ sein kann.

2.

Es sei ψm die Anzahl derjenigen Theiler der Zahl m, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind; man soll den asymptotischen Ausdruck der Summe $\sum_1^G {}_m \psi m$ für grosse Werthe von G finden.

Wird die auf alle Theiler T von m zu beziehende Summe $\Sigma \mu^2 T$ gebildet, so besteht dieselbe aus genau so vielen Einheiten, als m durch kein Quadrat (ausser 1) theilbare Divisoren besitzt, weil nach der Definition der Zahlen $\mu 1, \mu 2, \ldots \mu^2 T$ verschwindet, wenn T einen quadratischen Factor enthält. Man hat daher

$$(1.) \quad \psi m = \Sigma \mu^2 T.$$

Bezeichnet ferner T einen bestimmten Theiler von m und Q^2 das grösste in demselben aufgehende Quadrat, so ist

$$(2.) \quad \mu^2 T = \Sigma \mu d,$$

wo die Summation über alle Theiler d von Q zu erstrecken ist. In der That verschwindet diese Summe immer mit Ausnahme des Falles, in welchem $Q = 1$ ist.

Wird nun die Gleichung (2.) in (1.) substituirt, so ist das Resultat

leicht zu übersehen, wenn man erwägt, dass d^2 irgend einen quadratischen Theiler von m vorstellt und dass irgend ein bestimmtes Glied μd nach der Substitution so oft vorkommen wird, als die Anzahl der Theiler der Zahl $\frac{m}{d^2}$ beträgt, und man erhält daher

$$\psi m = \Sigma \mu d\, \mathfrak{T}\left(\frac{m}{d^2}\right),$$

wenn das Summenzeichen auf alle quadratischen Theiler d^2 von m bezogen und allgemein die Anzahl der Theiler einer Zahl $n = \mathfrak{T}n$ gesetzt wird.

In dieser Formel werde der Reihe nach

$$m = 1, 2, 3, \ldots [G]$$

gesetzt und hierauf die Summe der auf diese Weise entstandenen Gleichungen gebildet. Die ausschliesslich mit dem Factor μn behafteten, von

$$\psi n^2,\ \psi 2n^2,\ \ldots\ \psi\left[\frac{G}{n^2}\right] n^2$$

herrührenden Glieder

$$\mu n \mathfrak{T}1,\ \mu n \mathfrak{T}2,\ \ldots\ \mu n \mathfrak{T}\left[\frac{G}{n^2}\right]$$

lassen sich zu einem Gliede vereinigen, wenn zur Abkürzung

$$\mathfrak{T}1 + \mathfrak{T}2 + \cdots + \mathfrak{T}[x] = \mathfrak{S}x$$

gesetzt wird, und man schliesst

$$(3.)\quad \sum_{1}^{G}{}_m\, \psi m = \sum_{1}^{\sqrt{G}}{}_n\, \mu n\, \mathfrak{S}\left(\frac{G}{n^2}\right).$$

Für $\mathfrak{S}x$ hat man, wenn $l = [\sqrt{x}]$, den in allen Fällen gültigen Ausdruck

$$2\left([x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{l}\right]\right) - l^2,$$

aus welchem durch eine genauere Discussion

$$\mathfrak{S}x = x(\log x + 2\mathfrak{C} - 1) + \lambda\sqrt{x} + 2\lambda'$$

gefunden wird; $\mathfrak{C}$ stellt die *Euler*sche Constante und λ, λ' positive oder negative Zahlen vor, deren absolute Werthe die Einheit nicht übersteigen können.

Unter Berücksichtigung dieses Ausdruckes ergiebt sich nun aus (3.)

$$\sum_{1}^{G}{}_m\, \psi m = G(\log G + 2\mathfrak{C} - 1)\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\mu n}{n^2} - 2G\sum_{1}^{\infty}{}_n \mu n \frac{\log n}{n^2} + \Delta,$$

wo

$$\varDelta = -\mu(1+g)\frac{G}{(1+g)^2}\left(\log\frac{G}{(g+1)^2} + 2\mathfrak{C} - 1\right) - (2\mathfrak{C}-1)G\sum_{g+2}^{\infty}{}_n\frac{\mu n}{n^2}$$

$$+ G\sum_{g+2}^{\infty}\frac{\mu n}{n^2}\log\frac{n^2}{G} + \sqrt{G}\sum_{1}^{g}{}_n\frac{\lambda\mu n}{n} + 2\sum_{1}^{g}{}_n\lambda'\mu n$$

und $g = [\sqrt{G}]$.

Es ist aber ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\frac{G}{(1+g)^2}\left(\log\frac{G}{(1+g)^2} + 2\mathfrak{C} - 1\right) < 1,$$

$$\sum_{g+2}^{\infty}{}_n\frac{\mu n}{n^2} < \sum_{g+2}^{\infty}{}_n\frac{1}{n^2} < \frac{1}{\sqrt{G}},$$

$$\sum_{g+2}^{\infty}{}_n\frac{\mu n}{n^2}\log\frac{n^2}{G} < \sum_{g+2}^{\infty}{}_n\frac{1}{n^2}\log\frac{n^2}{G}$$

$$< \frac{2\log(g+1)}{g+2} + \frac{4}{g+1} - \frac{\log G}{g+2}$$

$$< \frac{2\log 2 + 4}{\sqrt{G}},$$

$$\sum_{1}^{g}{}_n\frac{\mu n\lambda}{n} < \sum_{1}^{g}{}_n\frac{1}{n} < \log\sqrt{G} + \mathfrak{C} + \frac{1}{\sqrt{G}},$$

$$\sum_{1}^{g}{}_n\lambda'\mu n < \sqrt{G}$$

und daher

$$\varDelta < (\tfrac{1}{2}\log G + 5 + 3\mathfrak{C} + 2\log 2)\sqrt{G} + 2.$$

Ferner folgt aus der Gleichung (Introd. in Anal. inf. Lib. I. Cap. XV. 275)

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\mu n}{n^s} = \frac{1}{\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{1}{n^s}}$$

durch Differentiation nach s.

$$-\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\mu n\log n}{n^s} = \frac{\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\log n}{n^s}}{\left(\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{1}{n^s}\right)^2}$$

und für $s = 2$

$$-\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\mu n\log n}{n^2} = \frac{36}{\pi^4}\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{\log n}{n^2} = \frac{36\mathfrak{F}}{\pi^4},$$

wenn der Zahlenwerth der Reihe

$$\frac{\log 2}{2^2} + \frac{\log 3}{3^2} + \frac{\log 4}{4^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet wird.

Es wird daher

$$\sum_1^G{}_m \psi m = \frac{6}{\pi^2} G \left(\log G + \frac{12\,\mathfrak{F}}{\pi^2} + 2\,\mathfrak{C} - 1\right) + \varDelta.$$

3.

Es soll die Summe der reciproken Werthe aller Primzahlen gefunden werden, welche durch eine gegebene eigentlich ursprüngliche positive quadratische Form mit negativer regulärer *) Determinante D dargestellt werden können, in $2D$ nicht aufgehen und eine gegebene Grenze G nicht übersteigen.

I. Zunächst soll der asymptotische Ausdruck der Summe der reciproken Werthe aller bis zur Grenze G vorkommenden in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen bestimmt werden, welche überhaupt durch eigentlich ursprüngliche positive Formen mit der Determinante D darstellbar sind. Es sind dies alle diejenigen Primzahlen q, welche die Bedingung

$$\left(\frac{D}{q}\right) = 1$$

erfüllen, das Zeichen in der *Legendre-Jacobi*schen Bedeutung genommen.

Da diese Primzahlen sich auf gewisse arithmetische Progressionen vertheilen, so könnte man die Summe $\sum\limits_{2}^{G} \frac{1}{q}$ aus einer in Band 78 dieses Journals demnächst erscheinenden Arbeit **) von mir entnehmen. Es lässt sich diese Summe aber auch direct, wie folgt, bestimmen.

Es sei auf alle ganzen positiven zu $2D$ theilerfremden Zahlen bis zur Grenze x bezogen

$$\sum_1^x \left(\frac{D}{m}\right) \frac{\log m}{m} = Mx, \quad \sum_1^x \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} = Lx.$$

Wird in jedem einzelnen Gliede von Mx m in seine Primfactoren zerfällt, so ergiebt sich durch Zusammenfassung sämmtlicher mit dem Lo-

---

*) Disquisitiones arithmeticae art. 306 VI.
**) Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Bd. 78, pag. 46.

garithmus der nämlichen ungeraden Primzahl p multiplicirten Bestandtheile der Ausdruck

$$\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p}.L\left(\frac{x}{p}\right)+\frac{\log p}{p^2}.L\left(\frac{x}{p^2}\right)+\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^3}L\left(\frac{x}{p^3}\right)+\cdots,$$

in welchem, nachdem man demselben die Gestalt

$$L(\infty)\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p}+R$$

gegeben hat,

$$R=\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{.\,p}\left\{L\left(\frac{x}{p}\right)-L\infty\right\}+\frac{\log p}{p^2}L\left(\frac{x}{p^2}\right)+\cdots$$

ist, und wegen der leicht zu beweisenden Ungleichungen

$$L\infty-L\frac{x}{p}<\varphi(-2D)\frac{p}{x},$$

$$L\frac{x}{p^2}<\varphi(-2D),$$

$$\cdots\cdots$$

seinem Zahlenwerthe nach nie die Grösse

$$\varphi(-2D)\left\{\frac{\log p}{x}+\frac{\log p}{p(p-1)}\right\}$$

erreichen kann. Es ist daher, wenn zur Abkürzung die über alle in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen p bis zur Grenze x zu erstreckende Summe

$$\sum_3^x\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p}=fx$$

gesetzt wird,

$$(4.)\quad Mx=L\infty\, fx+\Re,$$

wo ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\Re<\varphi(-2D)\left\{\frac{1}{x}\sum_3^x\log p+\sum_3^x\frac{\log p}{p(p-1)}\right\}$$

$$<\varphi(-2D)\left\{2+\sum_3^\infty\frac{\log p}{p(p-1)}\right\}\text{*)}.$$

Da $L\infty$ von Null verschieden und Mx convergent ist, so schliesst man aus (4.), dass fx nie eine gewisse angebbare Constante c übersteigen kann, wie gross auch x sei.

Mit Hülfe dieses Resultates beweist man ganz wie an dem angeführten Orte, dass die Reihe

---

*) Ebendaselbst (3.).

$$\sum_{3}^{\infty}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}$$

convergent ist, wenn die Glieder derselben nach der Grösse der Primzahlen p geordnet werden, und dass, wenn der Summenwerth derselben $= \mathfrak{D}$ gesetzt wird,

$$\sum_{3}^{G}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p} = \mathfrak{D} + \frac{2\lambda c}{\log(1+G)}$$

ist, wo λ eine die Einheit nicht überschreitende Zahl bezeichnet.

Addirt man diese Gleichung zu der Gleichung*)

$$\sum_{3}^{G}\frac{1}{p} = ll\,G + \mathfrak{E} - H - \sigma + \delta,$$

in welcher p alle bis zur Grenze G vorkommenden in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen, σ die Summe der reciproken Werthe der in $2D$ aufgehenden Primzahlen, $\mathfrak{E}$ die *Euler*sche Constante und H die Summe der Reihe

$$\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\log\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\log\frac{5}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\log\frac{7}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\log\frac{11}{10} - \frac{1}{11}\right) + \cdots$$

bezeichnet, so ergiebt sich

$$(5.)\quad \sum_{3}^{G}\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\,ll\,G + \frac{\mathfrak{E} - H - \sigma + \mathfrak{D}}{2} + \delta';$$

δ' ist eine Zahl, welche nie die Grenzen $\pm\left\{\frac{c+2}{\log(1+G)} + \frac{1}{G\log G}\right\}$ überschreiten kann, und die Summation betrifft alle in $2D$ nicht aufgehenden bis zur Grenze G vorkommenden Primzahlen q, welche die Bedingung $\left(\frac{D}{q}\right) = 1$ erfüllen.

Ist die Anzahl der verschiedenen für die Determinante D existirenden eigentlich ursprünglichen positiven Formenclassen $= 1$, so giebt die Formel (5.) die vollständige Auflösung der Aufgabe, d. h. den asymptotischen Ausdruck der Summe der reciproken Werthe aller bis zu der Grenze G vorkommenden durch irgend eine eigentlich ursprüngliche positive Form der Determinante D darstellbaren Primzahlen. Dies ist der Fall, wenn $D = -1, -2, -3, -4, -7$.

*) Ebendaselbst (13.).

Die Berechnung von $\mathfrak{D}$ lässt sich leicht in folgender Weise bewerkstelligen.

$\mathfrak{D}$ kann als der Grenzwerth der Reihe

$$\sum_3^\infty \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\varrho}}$$

für $\varrho = 0$ angesehen werden, weil vermöge der Function fx ganz wie an dem angeführten Orte gezeigt wird, dass für jedes nicht negative ϱ

$$\sum_3^\infty \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\varrho}} = \sum_3^G \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\varrho}} + \frac{2\lambda c}{\log(1+G)}$$

ist. Da nun

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m^{1+\varrho}} = \prod_3^\infty \frac{1}{1-\left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p^{1+\varrho}}}$$

$$\log \sum_1^\infty \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m^{1+\varrho}} = \sum_3^\infty \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\varrho}} + \frac{1}{2}\sum_3^\infty \frac{1}{p^{2+2\varrho}} + \frac{1}{3}\sum_3^\infty \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{3+3\varrho}} + \cdots,$$

so ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m^{2h+1}} = L_{2h+1}, \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{m^{2h}} = L_{2h},$$

$$\sum_3^\infty \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{2h+1}} = (2h+1) y_{2h+1}, \quad \sum_3^\infty \frac{1}{p^{2h}} = 2h\, y_{2h}$$

setzt,

$$\begin{aligned} \log L_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \cdots, \\ \tfrac{1}{2}\log L_2 &= \quad\; y_2 \quad\; + y_4 \quad\; + y_6 + \cdots, \\ \tfrac{1}{3}\log L_3 &+ \qquad\; y_3 \qquad\quad\; + y_6 + \cdots, \end{aligned}$$

$\cdots$

und hieraus

$$y_1 = \mathfrak{D} = \log L_1 - \tfrac{1}{2}\log L_2 - \tfrac{1}{3}\log L_3 - \tfrac{1}{5}\log L_5 + \tfrac{1}{6}\log L_6 - \cdots$$

Die Reihen $L_1, L_2, L_3, \cdots$ sind alle mit Hülfe der Zahl π summirbar.

II. Ist die Classenanzahl für die eigentlich ursprünglichen positiven Formen der Determinante $D > 1$, so sind Mittel nothwendig, welche eine bestimmte Form der Determinante D zu isoliren gestatten und welche in einem speciellen Falle, wo nämlich D eine negative Primzahl von der Form $4m + 3$ ist, bereits von *Dirichlet**) angegeben worden sind.

*) Auszug aus einer der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 5. März 1840 vorgelesenen Abhandlung. Dieses Journal Bd. 21.

Werden sämmtliche eigentlich ursprüngliche positive Formenclassen der Determinante D, deren Inbegriff ich mit Ω bezeichnen werde, in Geschlechter (genera) eingetheilt, so sind nach dem 307. Artikel II. der Disquisitiones arithmeticae, da D regulär vorausgesetzt wird, nur zwei Fälle möglich: entweder enthält jedes Geschlecht je eine Zwitterclasse (classis anceps), oder aber enthält die eine Hälfte der Geschlechter je zwei Zwitterclassen, die andre Hälfte gar keine. Da in diesen zwei Fällen die Aufgabe eine verschiedene Behandlung erheischt, so soll hier zunächst der erste betrachtet werden.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine eigentlich ursprüngliche positive Formenclasse des Hauptgeschlechts (genus principale), deren Zusammensetzungspotenzen sämmtliche n Classen des Hauptgeschlechtes zu erzeugen im Stande sind, $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \cdots \mathfrak{Z}_{\kappa-1}$ sämmtliche Zwitterclassen aus Ω, wobei $\mathfrak{Z}_0$ die Hauptclasse bezeichnet. Es lassen sich dann, wenn allgemein die aus der Zusammensetzung zweier Classen C, C' entspringende Formenclasse mit CC' bezeichnet wird, sämmtliche in Ω enthaltene Formenclassen folgendermassen gruppiren:

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathfrak{C}^0, & \mathfrak{C}^1, & \cdots & \mathfrak{C}^{n-1}, \\ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{C}^0, & \mathfrak{Z}_1\mathfrak{C}^1, & \cdots & \mathfrak{Z}_1\mathfrak{C}^{n-1}, \\ & \cdots & & \\ \mathfrak{Z}_{\kappa-1}\mathfrak{C}^0, & \mathfrak{Z}_{\kappa-1}\mathfrak{C}^1, & \cdots & \mathfrak{Z}_{\kappa-1}\mathfrak{C}^{n-1}; \end{cases}$$

die Classen der ersten Reihe bilden das Hauptgeschlecht, die der zweiten dasjenige Geschlecht, zu welchem $\mathfrak{Z}_1$ gehört u. s. w.; $\mathfrak{C}^0$ bezeichnet die Hauptclasse. Ist D eine negative Primzahl von der Form $4m+3$, so ist nur das Hauptgeschlecht und in (6.) nur die erste Reihe vorhanden. Ueberdies ist zu bemerken, dass n immer ungerade ist (Disq. arithm. art. 306 III.).

Es sei ferner $D = D'S^2$, wo S^2 das grösste in D aufgehende Quadrat bezeichnen soll, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots \mathfrak{e}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \cdots \mathfrak{e}'$ die Symbole von der Form $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}, (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}, (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{8}(n^2-1)}, \left(\frac{n}{p}\right)$, welche zur Definition der Einzelcharaktere der eigentlich ursprünglichen positiven Formen der Determinante D dienen, und von denen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots \mathfrak{e}$ speciell diejenigen Symbole seien, deren Product für jede zu $2D$ theilerfremde positive Zahl n sich

nach dem quadratischen Reciprocitätsgesetze in $\left(\frac{D'}{n}\right)$ umgestalten lässt. Wegen der Gleichung

$$\left(\frac{D'}{n}\right) = 1$$

ist für jede zu $2D$ theilerfremde durch Formen der Determinante D darstellbare positive Zahl n

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cdots\mathfrak{e} = 1,$$

und daher kommen unter den aus der Entwickelung des Ausdruckes

$$(1+\mathfrak{a})(1+\mathfrak{b})\cdots(1+\mathfrak{e})$$

entspringenden Gliedern je zwei Verbindungen von Symbolen vor, welche für sämmtliche Geschlechter einander gleich sind. Es ist nun für das Folgende zweckmässig, diese Glieder derart in zwei Gruppen Γ_1 und Γ_2 zu theilen, dass zu jedem in Γ_1 vorkommenden Gliede sich in Γ_2 ein entsprechendes vorfindet, welches mit jenem zusammengenommen das Product sämmtlicher Symbole $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\cdots\mathfrak{e}$ ergiebt. Beide Gruppen Γ_1, Γ_2. bestehen dann aus gleichvielen Gliedern, und es sei Γ_1 diejenige Gruppe, welche das Glied 1 enthält. Multiplicirt man alle Glieder von Γ_1 und Γ_2 der Reihe nach mit den Gliedern, welche aus der Entwickelung des Ausdruckes $(1+\mathfrak{a}')(1+\mathfrak{b}')\cdots(1+\mathfrak{e}')$ hervorgehen, so entstehen zwei Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, welche wieder aus gleichvielen, nämlich $\varkappa$ Gliedern bestehen, und jedem Gliede der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ wird ein Glied der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ entsprechen, welches jenem für alle Geschlechter gleich ist; $\mathfrak{G}_1$ enthält das Glied 1 und beide Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zusammengenommen ergeben genau sämmtliche Glieder des entwickelt gedachten Ausdruckes

$$(1+\mathfrak{a})(1+\mathfrak{b})\cdots(1+\mathfrak{e})(1+\mathfrak{a}')(1+\mathfrak{b}')\cdots(1+\mathfrak{e}').$$

Ist z. B. $D = -1848$, und man setzt zur Abkürzung

$$(-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = \mathfrak{a},\ \left(\frac{n}{3}\right) = \mathfrak{b},\ \left(\frac{n}{7}\right) = \mathfrak{c},\ \left(\frac{n}{11}\right) = \mathfrak{d},\ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = \mathfrak{a}',$$

so bestehen die Gruppen Γ_1, Γ_2, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ aus folgenden Gliedern:

Γ_1 aus $1,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}\mathfrak{d}$;

Γ_2 „ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}$;

$\mathfrak{G}_1$ „ $1,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{d}\mathfrak{a}'\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{a}'$;

$\mathfrak{G}_2$ „ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}$
$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}'$.

Bezeichnet nun χ irgend einen Ausdruck aus $\mathfrak{G}_1$ und $\chi_0, \chi_1, \cdots \chi_{n-1}$ die Werthe, welche χ für die Classen $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \cdots \mathfrak{Z}_{n-1}$ annimmt, so ist $\chi_\alpha \chi_\beta$ der Werth von χ, welcher der Classe $\mathfrak{Z}_\alpha \mathfrak{Z}_\beta$ entspricht und über alle Ausdrücke χ aus $\mathfrak{G}_1$ erstreckt

$$(7.) \quad \Sigma \chi_\mu \chi_\nu = x \text{ oder } = 0,$$

je nachdem μ und ν gleich oder verschieden sind, weil nämlich

$$\Sigma \chi_\mu \chi_\nu = \tfrac{1}{2}(1 + a_\mu a_\nu) \cdots (1 + a'_\mu a'_\nu) \cdots$$

ist. Ist ferner χ irgend ein Ausdruck aus $\mathfrak{G}_1$ ausser der Einheit, so ist immer

$$(8.) \quad \chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung beweist man am leichtesten, wenn man die über alle Ausdrücke χ aus $\mathfrak{G}_1$ zu erstreckende Summe $\Sigma(\chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_{n-1})^2$ entwickelt. Es ist nämlich

$$\Sigma(\chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_{n-1})^2 = \Sigma \chi_0^2 + \Sigma \chi_1^2 + \cdots + \Sigma \chi_{n-1}^2 \\ + 2\Sigma \chi_0 \chi_1 + \cdots$$

und nach (7.)

$$\Sigma(\chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_{n-1})^2 = x^2;$$

da nun das erste Glied der Summe, welches dem Ausdrucke $\chi = 1$ entspricht, den Werth x^2 hat, so müssen alle folgenden Quadrate verschwinden, was eben die Gleichung (8.) ergiebt.

Selbstverständlich haben die Gleichungen (7.) und (8.) nur dann einen Sinn und sind nur dann für das Folgende nothwendig, wenn mehr als ein Geschlecht existirt.

Dies vorausgeschickt, bilde man mit Hülfe irgend einer $n$ten Einheitswurzel ω die Ausdrücke

$$\begin{aligned} Fx = \quad & \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{0,0}} + \omega \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{0,1}} + \cdots + \omega^{n-1} \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{0,n-1}} \\ & + \chi_1 \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{1,0}} + \chi_1 \omega \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{1,1}} + \cdots + \chi_1 \omega^{n-1} \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{1,n-1}} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \chi_{n-1} \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{n-1,0}} + \chi_{n-1} \omega \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{n-1,1}} + \cdots + \chi_{n-1} \omega^{n-1} \overset{x}{\Sigma} \frac{1}{f_{n-1,n-1}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_1 x = \quad & \sum^{x} \frac{\log f_{0,0}}{f_{0,0}} + \quad \omega \sum^{x} \frac{\log f_{0,1}}{f_{0,1}} + \cdots + \quad \omega^{n-1} \sum^{x} \frac{\log f_{0,\, n-1}}{f_{0,\, n-1}} \\
+ \quad & \chi_1 \sum^{x} \frac{\log f_{1,0}}{f_{1,0}} + \chi_1\, \omega \sum^{x} \frac{\log f_{1,1}}{f_{1,1}} + \cdots + \quad \chi_1\, \omega^{n-1} \sum^{x} \frac{\log f_{1,\, n-1}}{f_{1,\, n-1}} \\
+ \quad & \cdots \\
+ \; & \chi_{n-1} \sum^{x} \frac{\log f_{n-1,\, 0}}{f_{n-1,\, 0}} + \chi_{n-1}\, \omega \sum^{x} \frac{\log f_{n-1,\, 1}}{f_{n-1,\, 1}} + \cdots + \chi_{n-1}\, \omega^{n-1} \sum^{x} \frac{\log f_{n-1,\, n-1}}{f_{n-1,\, n-1}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A x = \quad & \mathfrak{A}_{0,\,0} + \quad \omega\, \mathfrak{A}_{0,\,1} + \cdots + \quad \omega^{n-1}\, \mathfrak{A}_{0,\, n-1} \\
+ \quad & \chi_1 \mathfrak{A}_{1,\,0} + \chi_1 \omega\, \mathfrak{A}_{1,\,1} + \cdots + \chi_1 \omega^{n-1}\, \mathfrak{A}_{1,\, n-1} \\
+ \quad & \cdots \\
+ \; & \chi_{n-1} \mathfrak{A}_{n-1,\,0} + \chi_{n-1}\, \omega\, \mathfrak{A}_{n-1,\,1} + \cdots + \chi_{n-1}\, \omega^{n-1}\, \mathfrak{A}_{n-1,\, n-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(z, \chi, \omega) = \quad & \tfrac{1}{2} \sum^{\infty} \frac{1}{f_{0,\,0}^{z}} + \quad \tfrac{1}{2}\, \omega \sum^{\infty} \frac{1}{f_{0,\,1}^{z}} + \cdots + \quad \tfrac{1}{2}\, \omega^{n-1} \sum^{\infty} \frac{1}{f_{0,\, n-1}^{z}} \\
+ \quad & \tfrac{1}{2}\, \chi_1 \sum^{\infty} \frac{1}{f_{1,\,0}^{z}} + \tfrac{1}{2} \chi_1\, \omega \sum^{\infty} \frac{1}{f_{1,\,1}^{z}} + \cdots + \tfrac{1}{2}\, \chi_1\, \omega^{n-1} \sum^{\infty} \frac{1}{f_{1,\, n-1}^{z}} \\
+ \quad & \cdots \\
+ \; & \tfrac{1}{2}\, \chi_{n-1} \sum^{\infty} \frac{1}{f_{n-1,\,0}^{z}} + \tfrac{1}{2} \chi_{n-1}\, \omega \sum^{\infty} \frac{1}{f_{n-1,\,1}^{z}} + \cdots + \tfrac{1}{2} \chi_{n-1}\, \omega^{n-1} \sum^{\infty} \frac{1}{f_{n-1,\, n-1}^{z}}.
\end{aligned}
$$

$f_{\alpha,\beta}$ bezeichnet hierin allgemein die repräsentirende Form der Classe $\mathfrak{Z}_\alpha \mathfrak{S}^\beta$; die Summenzeichen in Fx und $F_1 x$ beziehen sich auf alle in die betreffende Form $f_{\alpha,\beta}$ einzusetzenden positiven und negativen ganzzahligen Werthe von u und v, welche dieser Form einen zu $2D$ theilerfremden die positive Grenze x nicht übersteigenden Werth verleihen, und $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$ bezeichnet die Anzahl der unter diesen Bedingungen für die Form $f_{\alpha,\beta}$ angebbaren Werthepaare (u, v). In dem Ausdrucke $\Psi(z, \chi, \omega)$ beziehen sich die Summenzeichen auf die nämlichen Werthe von u und v wie in Fx, nur fällt die Beschränkung weg, dass die durch die Formen $f_{0,\,0} \cdots$ dargestellten Zahlen die Grenze x nicht überschreiten sollen.

Die Reihe $\Psi(z, \chi, \omega)$ ist für jeden Werth von z, welcher > 1 ist, convergent und lässt sich in ein unendliches Product, wie folgt, verwandeln.

Man denke sich in Ψ alle Glieder, deren Nenner $= m^z$ ist, unter Heraushebung des Factors m^{-z} zusammengezogen und bezeichne den auf diese Weise erhaltenen Gesammtcoefficienten von $\frac{1}{m^z}$ mit (m). Es ist dann,

wenn die Primzahl q durch die Formen $f_{n,\nu}$, $f_{n,n-\nu}$ (oder durch die Form $f_{n,0}$ auf zweierlei Art) dargestellt wird,

$$\begin{aligned}(1) &= 1,\\ (q) &= \chi_n(\omega^\nu + \omega^{-\nu}),\\ (q^2) &= \omega^{2\nu} + \omega^{-2\nu} + 1,\\ (q^3) &= \chi_n(\omega^{3\nu} + \omega^{-3\nu}) + \chi_n(\omega^\nu + \omega^{-\nu})\end{aligned}$$

und allgemein

$$(9.)\quad \begin{cases}(q^{2h}) = \omega^{2h\nu} + \omega^{-2h\nu} + \omega^{2(h-1)\nu} + \omega^{-2(h-1)\nu} + \cdots + \omega^{2\nu} + \omega^{-2\nu} + 1,\\ (q^{2h+1}) = \chi_n(\omega^{(2h+1)\nu} + \omega^{-(2h+1)\nu}) + \chi_n(\omega^{(2h-1)\nu} + \omega^{-(2h-1)\nu})\\ \qquad + \cdots + \chi_n(\omega^\nu + \omega^{-\nu}),\end{cases}$$

wie leicht aus der Theorie der Zusammensetzung der quadratischen Formen sich ergiebt. Ferner findet man leicht, dass, wenn m und m' zwei Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, welche nur aus durch Formen der Determinante D darstellbaren Primzahlen bestehen,

$$(10.)\quad (m)(m') = (mm')$$

ist. Es sei nämlich m durch die Form $f_{n,\xi}$ mit Hülfe der Zahlen u, v, m' durch $f_{n',\xi'}$ mit Hülfe der Zahlen u', v' darstellbar, in dem ersten Falle der grösste gemeinschaftliche Factor der darstellenden Zahlen $= e$, im zweiten $= e'$ und w, w' bezüglich die Wurzeln der Congruenzen

$$w^2 \equiv D\left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{e^2}\right),\quad w'^2 \equiv D\left(\mathrm{mod}\ \frac{m'}{e'^2}\right),$$

zu denen die Darstellungen $\left(\frac{u}{e}, \frac{v}{e}\right)$, $\left(\frac{u'}{e'}, \frac{v'}{e'}\right)$ von $\frac{m}{e^2}$ und $\frac{m'}{e'^2}$ durch die Formen $f_{n,\xi}$, $f_{n',\xi'}$ gehören. Es sind dann die Formen $f_{n,\xi}$, $f_{n',\xi'}$ bezüglich den Formen $\left(\frac{m}{e^2}, w, \frac{(w^2-D)e^2}{m}\right)$, $\left(\frac{m'}{e'^2}, w', \frac{(w'^2-D)e'^2}{m'}\right)$ eigentlich aequivalent. Aus den letzteren ist aber (Disq. arithm. 243) die Form $\left(\frac{mm'}{e^2e'^2}, v, \frac{(v^2-D)e^2e'^2}{mm'}\right)$ zusammengesetzt, wenn v so bestimmt wird, dass

$$(11.)\quad \begin{cases} v \equiv w & \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{e^2}\right),\\ v \equiv w' & \left(\mathrm{mod}\ \frac{m'}{e'^2}\right)\end{cases}$$

wird. Es gehört daher diese Form zur Classe $\mathfrak{Z}_n \mathfrak{Z}_{n'} \mathfrak{C}^{\xi+\xi'}$, und die Zahl $\frac{mm'}{e^2e'^2}$ wird durch die repräsentirende Form dieser Classe mit Hülfe zweier

zu einander theilerfremden Zahlen ξ, η derart dargestellt, dass die Darstellung zu derjenigen Wurzel der Congruenz

$$v^2 \equiv D \left(\text{mod } \frac{mm'}{e^2 e'^2}\right)$$

gehört, welche die Bedingungen (11.) erfüllt; die nämliche Form wird m vermöge der Zahlen $ee'\xi$, $ee'\eta$ darstellen. Leitet man auf diese Weise aus je einer Darstellung von m und einer Darstellung von m' eine Darstellung von mm' her, so ist klar, dass genau sämmtliche Darstellungen der Zahl mm' durch eigentlich ursprüngliche Formen der Determinante D, und zwar jede zwei Mal, erhalten werden.

Enthält m Primzahlen r, für welche $\left(\frac{D}{r}\right) = -1$ ist, und man setzt $m = m'R$, wo m' durch keine Primzahl r theilbar ist, R hingegen nur aus solchen besteht, so ist

$$(12.) \quad (m) = (m')(R)$$

und $(R) = 1$ oder $= 0$, je nachdem R ein Quadrat ist oder nicht.

Die Gleichungen (9.), (10.), (12.) ergeben

$$(13.) \quad \Psi(z, \chi, \omega) = \Pi \frac{1}{1 - \frac{1}{r^{2s}}} \Pi \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi_\mu \omega^\nu}{q^s}\right)\left(1 - \frac{\chi_\mu \omega^{-\nu}}{q^s}\right)};$$

das erste Productzeichen erstreckt sich auf alle Primzahlen r, für welche $\left(\frac{D}{r}\right) = -1$ ist, das zweite auf alle Primzahlen q, in Bezug auf welche D quadratischer Rest ist, und μ, ν sind die jedesmaligen Zeiger der Form $f_{\mu,\nu}$, durch welche q darstellbar ist.

Wird vorausgesetzt, dass χ und ω nicht beide $= 1$ sind, so wird der Werth des Ausdruckes Ax von der Ordnung $\sqrt{x}$ sein, d. h. durch eine Formel, wie

$$(14.) \quad Ax = \mathfrak{H}\sqrt{x}$$

gegeben sein, in welcher der analytische Modul von $\mathfrak{H}$ beständig unter einer angebbaren Grösse $\mathfrak{H}^0$ bleibt. In der That ist

$$\mathfrak{A}_{\alpha,\beta} = \frac{\pi\varphi(-2D)}{2\sqrt{-D^3}}x + B\sqrt{x},$$

worin B eine leicht anzugebende Grenze B^0 *) nicht zu übersteigen vermag;

*) *C. F. Gauss* Werke Bd. II. S. 277.

wird nun mit $\chi_\alpha\, \omega^\beta$ multiplicirt und über alle Werthe von α und β summirt, so ergiebt sich wegen

$$\Sigma \chi_\alpha\, \omega^\beta = \Sigma \chi_\alpha\, \Sigma\, \omega^\beta = 0,$$

$$Ax = \sqrt{x}\, \Sigma \chi_\alpha\, \omega^\beta\, B,$$

und es ist

$$\operatorname{mod} \Sigma\, \chi_\alpha\, \omega^\beta\; B < \Sigma\, B^0.$$

Mit Hülfe des Ausdruckes (14.) lässt sich leicht beweisen, dass jeder der Ausdrücke Fx, F_1x mit unbegrenzt wachsendem x einem festen Werthe zustrebt. In der That lässt sich immer für x ein solcher Werth x^0 angeben, dass jede Erweiterung dieser Ausdrücke über x^0 hinaus bis zu einem beliebig gegebenen Werthe x' von x nur solche Aenderungen von Fx und F_1x zur Folge haben kann, welche in ihren reellen und imaginären Theilen eine gegebene Grenze von vorgeschriebener Kleinheit nicht zu erreichen vermögen. Es ist nämlich, wenn x^0 und x' der Einfachheit halber ganzzahlig vorausgesetzt werden,

$$\begin{aligned}
Fx' - Fx^0 &= \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \frac{As - A(s-1)}{s} \\
&= -\frac{Ax^0}{1+x^0} + \frac{Ax'}{1+x'} + \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s As\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right), \\
\operatorname{mod}(Fx' - Fx^0) &< \frac{\mathfrak{H}^0 \sqrt{x^0}}{1+x^0} + \frac{\mathfrak{H}^0 \sqrt{x'}}{1+x'} + \mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\sqrt{s} \\
&< \frac{\mathfrak{H}^0 \sqrt{x^0}}{1+x^0} + \frac{\mathfrak{H}^0 \sqrt{x'}}{1+x'} + 2\mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{s+1}}\right) \\
&< \frac{3\mathfrak{H}^0}{\sqrt{1+x^0}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1x' - F_1x^0 &= \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \frac{As - A(s-1)}{s} \log s \\
&= -Ax^0 \frac{\log(1+x^0)}{1+x^0} + Ax' \frac{\log(1+x')}{1+x'} + \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s As\left(\frac{\log s}{s} - \frac{\log(s+1)}{s+1}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod}(F_1x' - F_1x^0) &< \mathfrak{H}^0 \frac{\log(1+x^0)}{\sqrt{1+x^0}} + \mathfrak{H}^0 \frac{\log(1+x')}{\sqrt{1+x'}} \\
&\quad + \mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \left(\frac{\log s}{s} - \frac{\log(s+1)}{s+1}\right)\sqrt{s}
\end{aligned}$$

$$< \mathfrak{H}^0 \frac{\log(1+x^0)}{\sqrt{1+x^0}} + \mathfrak{H}^0 \frac{\log(1+x')}{\sqrt{1+x'}}$$
$$+ \mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \left(\frac{\log s}{\sqrt{s}} - \frac{\log(s+1)}{\sqrt{s+1}}\right)$$
$$+ \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s (\sqrt{s+1} - \sqrt{s}) \frac{\log(s+1)}{s+1}$$
$$< \frac{2\mathfrak{H}^0 \log(1+x^0)}{\sqrt{1+x^0}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \frac{\log s}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Auf dieselbe Weise findet man als obere Grenze für den Modul von Fx die Grösse $3\mathfrak{H}^0$.
Bezeichnet daher F^0 den Grenzwerth von Fx für $x=\infty$, so hat man

$$(15.)\quad Fx = F^0 + \frac{3\lambda\mathfrak{H}^0}{\sqrt{x}},$$

wo λ eine Zahl ist, deren analytischer Modul die Einheit nicht übersteigt.

Dass dieser Grenzwerth F^0 nicht verschwinden kann, lässt sich ähnlich, wie es *Dirichlet* bei mehreren Gelegenheiten gethan hat, beweisen. Es kann nämlich F^0 als Grenzwerth von $2\Psi(1+\varrho, \chi, \omega)$ für $\varrho=0$ angesehen werden. Ist nun zunächst $\omega=1$ und χ nicht $=1$ (was die Existenz mehrerer Geschlechter voraussetzt), so hat man nach (13.)

$$\Psi(1+\varrho, \chi, 1) = \Pi \frac{1}{1-\frac{1}{r^{2+2\varrho}}}\, \Pi \left(\frac{1}{1-\frac{\chi_n}{q^{1+\varrho}}}\right)^2,$$

und da χ immer von der Form $\left(\frac{d}{m}\right)$ ist, wo d einen gewissen (positiven oder negativen) Theiler von D vorstellt, so kann man

$$D = dd',$$

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{r^{2+2\varrho}}} = \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{d}{r}\right)\frac{1}{r^{1+\varrho}}}\, \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{d'}{r}\right)\frac{1}{r^{1+\varrho}}},$$

$$\Pi \frac{1}{\left(1-\frac{\chi_n}{q^{1+\varrho}}\right)^2} = \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{d}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\varrho}}}\, \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{d'}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\varrho}}}$$

setzen und erhält, über alle in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen p erstreckt,

$$\Psi(1+\varrho, \chi, 1) = \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{d}{p}\right)\frac{1}{p^{1+\varrho}}}\, \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{d'}{p}\right)\frac{1}{p^{1+\varrho}}}$$

$$= \Sigma\left(\frac{d}{m}\right)\frac{1}{m^{1+\iota}}\,\Sigma\left(\frac{d'}{m}\right)\frac{1}{m^{1+\iota}},$$

$$F^0 = \Sigma\left(\frac{d}{m}\right)\frac{1}{m} \times \Sigma\left(\frac{d'}{m}\right)\frac{1}{m},$$

von welchen Reihen keine verschwinden kann. Um dann den Beweis für den allgemeinsten Fall zu führen, gehe man in der Gleichung (13.) zu den Logarithmen über und summire hierauf in Bezug auf alle Werthe von ω und alle Ausdrücke χ aus $\mathfrak{S}_1$. Setzt man $s = 1 + \varrho$ und zur Abkürzung

$$\Pi \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2+2\iota}}} = R,$$

so ergiebt sich

$$(16.) \quad \begin{cases} -\varkappa n \log R + \sum_\chi \log \Psi(1+\varrho, \chi, 1) + \sum_\chi (\log \Psi(1+\varrho, \chi, \omega) \\ + \log \Psi(1+\varrho, \chi, \omega^{-1})) + \cdots = 2\varkappa n \left\{\Sigma \frac{1}{q^{1+\iota}} + \cdots\right\}, \end{cases}$$

wo das erste Summenzeichen der rechten Seite sich auf alle durch die Hauptform darstellbaren Primzahlen q u. s. w. bezieht. Würde nun eine der Functionen $\Psi(1+\varrho, \chi, \omega)$, in welcher ω nicht $= 1$ ist, mit unbegrenzt abnehmendem ϱ unendlich klein werden, so würde der conjugirte Ausdruck $\Psi(1+\varrho, \chi, \omega^{-1})$ sich in demselben Falle befinden, und die linke Seite der Gleichung (16.) würde für hinreichend kleine Werthe von ϱ negativ werden, was unmöglich ist.

Man denke sich nun in den einzelnen Gliedern des Ausdruckes $F_1(s, \chi, \omega)$, welche alle die Gestalt $\chi_a\, \omega^\beta \frac{\log m}{m}$ haben, den Logarithmus von m in die Logarithmen der Primfactoren von m zerlegt und fasse hierauf alle mit dem Logarithmus der nämlichen Primzahl q behafteten Glieder zu einem Gesammtgliede $\mathfrak{G}$ zusammen.

Setzt man zunächst voraus, dass q eine Primzahl ist, in Bezug auf welche D quadratischer Rest ist, und dass q durch die Formen $f_{\varkappa,\nu}, f_{\varkappa,n-\nu}$ (eventuell $f_{\varkappa,0}$ doppelt gedacht) darstellbar ist, so lässt sich $\mathfrak{G}$ leicht bilden, wenn man alle durch eigentlich ursprüngliche positive Formen der Determinante D unter den Summationsbedingungen dargestellten Vielfachen von q betrachtet.

Es sei $m = m'q^l$ irgend eines dieser Vielfachen und q^l die höchste in m aufgehende Potenz von q. Es ist dann $\mathfrak{Z}(m)\dfrac{\log m}{m}$ der Complex aller derjenigen Glieder von $F_1 x$, welche m zum Nenner haben, und der Beitrag, den dieser Complex zu $\mathfrak{G}$ leistet, ist $= 2\, l\, \dfrac{(m)}{m} \log q$. Man verificirt nun leicht mit Hülfe der Formeln (9.), (10.), (12.), oder auch durch logarithmische Differentiation der Gleichung (13.) nach z, dass

$$l(q^l) = (q^{l-1})\,\chi_\mu(\omega^\nu + \omega^{-\nu}) + (q^{l-2})\,(\omega^{2\nu} + \omega^{-2\nu}) + \cdots + (1)\,\chi_\mu^l(\omega^{l\nu} + \omega^{-l\nu})$$

und hienach allgemeiner

$$l(m) = l(m'q^l) = (m'q^{l-1})\,\chi_\mu(\omega^\nu + \omega^{-\nu}) + (m'q^{l-2})\,(\omega^{2\nu} + \omega^{-2\nu})$$
$$+ \cdots + (m')\,\chi_\mu^l(\omega^{l\nu} + \omega^{-l\nu})$$

ist. Es lässt sich demzufolge der Ausdruck

$$2\, l\, \frac{(m)}{m} \log q$$

auf die Form

$$\frac{\mathfrak{Z}(m' q^{l-1})}{m' q^{l-1}}\,\chi_\mu(\omega^\nu + \omega^{-\nu})\,\frac{\log q}{q} + \frac{\mathfrak{Z}(m' q^{l-2})}{m' q^{l-2}}\,(\omega^{2\nu} + \omega^{-2\nu})\,\frac{\log q}{q^2} + \cdots$$

bringen und es wird

$$\mathfrak{G} = F\left(\frac{x}{q}, \chi, \omega\right)\chi_\mu(\omega^\nu + \omega^{-\nu})\,\frac{\log q}{q} + F\left(\frac{x}{q^2}, \chi, \omega\right)\left(\omega^{2\nu} + \omega^{-2\nu}\right)\frac{\log q}{q^2}$$
$$+ F\left(\frac{x}{q^3}, \chi, \omega\right)\chi_\mu(\omega^{3\nu} + \omega^{-3\nu})\,\frac{\log q}{q^3} + \cdots$$

Da aber

$$F\left(\frac{x}{q}, \chi, \omega\right) = F^0 + \frac{3\lambda\,\mathfrak{H}^0\sqrt{q}}{\sqrt{x}},$$

$$\operatorname{mod} F\left(\frac{x}{q^2}, \chi, \omega\right) < 3\,\mathfrak{H}^0,$$

$$\operatorname{mod} F\left(\frac{x}{q^3}, \chi, \omega\right) < 3\,\mathfrak{H}^0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so kann man

$$\mathfrak{G} = F^0\,\chi_\mu(\omega^\nu + \omega^{-\nu})\,\frac{\log q}{q} + \mathfrak{R}$$

setzen, wo

$$\operatorname{mod} \mathfrak{R} < 6\,\mathfrak{H}^0\left(\frac{1}{\sqrt{qx}} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots\right)\log q,$$

also

$$< \frac{6\mathfrak{H}^0}{\sqrt{x}} \frac{\log q}{\sqrt{q}} + 6\mathfrak{H}^0 \frac{\log q}{q(q-1)}.$$

Ist dagegen q eine Primzahl, welche nicht durch die Formen der Determinante D darstellbar ist, so kann es nur als gemeinschaftlicher Factor zweier darstellenden Zahlen u, v auftreten, und es ist in diesem Falle

$$\mathfrak{S} = \frac{2\log q}{q^2} F\left(\frac{x}{q^2}, \chi, \omega\right) + \frac{2\log q}{q^4} F\left(\frac{x}{q^4}, \chi, \omega\right) + \cdots,$$

$$\operatorname{mod} \mathfrak{S} < 6\mathfrak{H}^0 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4} + \cdots\right)$$

$$< \frac{6\mathfrak{H}^0}{q(q-1)}.$$

Werden nun die zu den einzelnen Primzahlen gehörenden Gesammtglieder $\mathfrak{S}$ addirt, so ergiebt sich

$$(17.)\quad F_1(x, \chi, \omega) = F^0 \sum_1^x \chi_\kappa (\omega^\nu + \omega^{-\nu}) \frac{\log q}{q} + \Delta.$$

Hierin bezieht sich das Summenzeichen auf alle bis zur Grenze x vorkommenden in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen q, in Bezug auf welche D quadratischer Rest ist, und μ, ν sind die jedesmaligen Zeiger der Form $f_{\mu,\nu}$, durch welche q darstellbar ist; Δ ist dem analytischen Modul nach

$$< 6\mathfrak{H}^0 \sum_1^\infty \frac{\log p}{p(p-1)} + \frac{6\mathfrak{H}^0}{\sqrt{x}} \sum_1^x \frac{\log p}{\sqrt{p}},$$

wo p alle ungeraden Primzahlen ohne Unterschied vorstellt.

Um eine genauere Begrenzung für Δ zu gewinnen, ist eine eingehendere Untersuchung der Summe $\sum_1^x \frac{\log p}{\sqrt{p}}$ nothwendig. Setzt man zur Abkürzung

$$\sum_1^y \log p = \psi y,$$

so ist

$$\sum_1^x \frac{\log p}{\sqrt{p}} = \sum_1^x {}_s \frac{\psi s - \psi(s-1)}{\sqrt{s}}$$

$$= \frac{\psi x}{\sqrt{1+[x]}} + \sum_1^x \psi s \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{s+1}}\right),$$

und da

$$\psi y < 2y,$$

so schliesst man

$$(18.)\quad \sum_{1}^{x} \frac{\log p}{\sqrt{p}} < 2\sqrt{x} + \sum_{1}^{x}{}_{s} \frac{1}{\sqrt{s}} < 4\sqrt{x}.$$

Hiernach wird also in (17.)

$$\bmod \Delta < 6\mathfrak{H}^0 \sum_{1}^{\infty} \frac{\log p}{(p-1)p} + 24\mathfrak{H}^0.$$

Da F^0 von Null verschieden und $F_1 x$ convergent ist, so zeigt die Gleichung (17.), dass die Summe $\sum_{1}^{x} \chi_\mu (\omega^\nu + \omega^{-\nu}) \frac{\log q}{q}$ ihrem Zahlenwerthe nach nie eine gewisse angebbare Constante C_1 überschreiten kann, wie gross auch x sei.

Es sei nun

$$\sum_{1}^{x} \chi_\mu (\omega^\nu + \omega^{-\nu}) \frac{\log q}{q} = \Theta x$$

und s irgend eine positive ganze von der Einheit verschiedene Zahl. Es ist dann der Ausdruck

$$\frac{\Theta s - \Theta(s-1)}{\log s} = \chi_\mu \frac{(\omega^\nu + \omega^{-\nu})}{q} \text{ oder } = 0,$$

je nachdem s eine durch Formen der Determinante D darstellbare Primzahl q oder irgend eine andere ganze positive Zahl ist, und daher

$$\sum_{1+x^0}^{x'} \chi_\mu \frac{(\omega^\nu + \omega^{-\nu})}{q} = \sum_{1+x^0}^{x'}{}_{s} \frac{\Theta s - \Theta(s-1)}{\log s}$$

$$= -\frac{\Theta x^0}{\log(1+x^0)} + \frac{\Theta x'}{\log(1+x')} + \sum_{1+x^0}^{x'}{}_{s} \Theta s \left(\frac{1}{\log s} - \frac{1}{\log(s+1)}\right)$$

$$< \frac{C_1}{\log(1+x^0)} + \frac{C_1}{\log(1+x')} + \sum_{1+x^0}^{x'}{}_{s} C_1 \left(\frac{1}{\log s} - \frac{1}{\log(1+s)}\right)$$

$$< \frac{2C_1}{\log(1+x^0)}$$

ohne Rücksicht auf das Zeichen. Dies zeigt, dass die Reihe $\sum_{1}^{\infty} \chi_\mu \frac{(\omega^\nu + \omega^{-\nu})}{q}$, wenn die Glieder derselben nach der Grösse der Primzahlen q geordnet werden, convergirt, und dass, wenn der Summenwerth derselben mit $\mathfrak{W}(\chi, \omega)$ bezeichnet wird,

$$(19.)\quad \sum_{1}^{G} \chi_\mu \frac{(\omega^\nu + \omega^{-\nu})}{q} = \mathfrak{W}(\chi, \omega) + \frac{2\lambda C_1}{\log(1+G)}$$

gesetzt werden kann.

Diese Formel gilt für alle Verbindungen von χ und ω, mit Aus-

nahme des einzigen Falles, in welchem gleichzeitig $\chi = 1$ und $\omega = 1$ ist. In diesem Falle hat man nach (5.)

$$(20.)\quad \sum_{3}^{G} \frac{1}{q} = \tfrac{1}{2}\, llG + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C} - H - \sigma + \mathfrak{D}) + \delta'.$$

Aus den Formeln (19.) und (20.) lässt sich zunächst leicht der asymptotische Ausdruck der Summe der reciproken Werthe aller durch Formen eines gegebenen Geschlechts aus Ω darstellbaren, die Grenze G nicht überschreitenden Primzahlen herleiten. Setzt man nämlich über alle Ausdrücke χ aus $\mathfrak{G}_1$ mit Ausnahme der Einheit erstreckt

$$\sum_{\chi} \chi_a\, \mathfrak{M}(\chi, 1) = L_a(1),$$

und über alle Ausdrücke χ aus $\mathfrak{G}_1$ ohne Ausnahme erstreckt

$$\sum_{\chi} \chi_a\, \mathfrak{W}(\chi, \omega) = L_a(\omega),$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (19.) und (20.) nach (7.)

$$(21.)\quad \sum_{3}^{G} \frac{1}{q} = \frac{llG}{2\varkappa} + \frac{\mathfrak{C} - H - \sigma + \mathfrak{D} + L_a(1)}{2\varkappa} + \varepsilon,$$

wenn $\omega = 1$ ist; dagegen

$$(22.)\quad \sum_{3}^{G} \frac{\omega^{\nu} + \omega^{-\nu}}{2q} = \frac{1}{2\varkappa} L_a(\omega) + \varepsilon',$$

wenn ω nicht $= 1$ ist; das Summenzeichen bezieht sich in beiden Fällen auf alle Primzahlen q, welche durch Formen des die Zwitterclasse $\mathfrak{Z}_a$ enthaltenden Geschlechtes darstellbar sind; ε und ε' sind Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\log G}$, für welche sich leicht obere Grenzen angeben lassen.

Die Gleichung (21.) enthält die vollständige Lösung der Aufgabe in dem Falle, wo $n = 1$, d. h. in jedem Geschlechte nur je eine Classe vorhanden ist; hierher gehören mit Ausnahme von -1, -2, -3, -4, -7 alle jene 65 Determinanten, welche *Gauss* im 303. Artikel der Disq. arithm. aufzählt.

Ist $n > 1$, so gestatten die Gleichungen (21.) und (22.) die durch eine bestimmte Form $f_{a,\vartheta}$ (oder $f_{a,-\vartheta}$) darstellbaren Primzahlen in folgender Weise zu isoliren:

$$\sum_{s}^{\sigma}\frac{1}{q}=\frac{l l G}{2\varkappa n}+\frac{\mathfrak{E}-H-o+\mathfrak{D}+L_\alpha(1)}{2\varkappa n}$$

$$+\left(\frac{e^{\frac{2\mathfrak{B}\pi i}{n}}+e^{\frac{-2\mathfrak{B}\pi i}{n}}}{2\varkappa n}\right)L_\alpha(e^{\frac{2\pi i}{n}})+\left(\frac{e^{\frac{4\mathfrak{B}\pi i}{n}}+e^{\frac{-4\mathfrak{B}\pi i}{n}}}{2\varkappa n}\right)L_\alpha(e^{\frac{4\pi i}{n}})+\cdots$$

$$+\left(\frac{e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}}+e^{\frac{-(n-1)\pi i}{n}}}{2\varkappa n}\right)L_\alpha(e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}})+\varepsilon''.$$

III. Sind nur in einer Hälfte der Geschlechter Zwitterclassen enthalten, so sind die Classen von Ω nach der Vorschrift des 307. Artikels VII. der Disq. arithm. zu gruppiren.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine Classe, deren Zusammensetzungspotenzen alle Classen ihres eigenen und des Hauptgeschlechts zu erzeugen im Stande sind, so dass die Formen

$$(23.)\quad \mathfrak{E}^0,\ \mathfrak{E}^1,\ \mathfrak{E}^2,\ \cdots\ \mathfrak{E}^{2n-1}$$

alle verschieden sind; die Potenzen mit geradem Exponenten stellen dann alle Classen des Hauptgeschlechts, die mit ungeradem Exponenten alle Classen des Geschlechts, zu welchem $\mathfrak{E}$ gehört, dar. Erschöpft diese Reihe noch nicht alle Classen Ω, so nehme man eine der in Ω nach Entfernung der Reihe (23.) zurückgebliebenen Zwitterclassen $\mathfrak{Z}_1$ und bilde die Reihe

$$(24.)\quad \mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}^0,\ \ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}^1,\ \ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}^2,\ \cdots\ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}^{2n-1},$$

welche wiederum zwei vollständige Geschlechter aus Ω umfasst und nur zwei Zwitterclassen enthalten wird. Repräsentiren die Reihen (23.) und (24.) noch nicht alle Classen von Ω, so sei $\mathfrak{Z}_2$ eine weder in (23.) noch (24.) vorkommende Zwitterclasse, und man bilde die Periode

$$\mathfrak{Z}_2\mathfrak{E}^0,\ \ \mathfrak{Z}_2\mathfrak{E}^1,\ \ \mathfrak{Z}_2\mathfrak{E}^2,\ \cdots\ \mathfrak{Z}_2\mathfrak{E}^{2n-1}.$$

So fahre man fort, bis der ganze Classenausschuss Ω erschöpft ist. Es können dann alle Classen von Ω folgendermassen gruppirt werden:

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{E}^0,\quad \mathfrak{E}^1,\ \cdots\quad \mathfrak{E}^{2n-1},\\
\mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}^0,\ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}^1,\ \cdots\ \mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}^{2n-1},\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\mathfrak{Z}_{l-1}\mathfrak{E}^0,\ \mathfrak{Z}_{l-1}\mathfrak{E}^1,\ \cdots\ \mathfrak{Z}_{l-1}\mathfrak{E}^{2n-1}.
\end{array}$$

Im Uebrigen führen ganz die nämlichen Schlüsse, wie in dem ersten Falle, zur Lösung der Aufgabe, weshalb ich hier nicht mehr näher darauf eingehe. Zu bemerken wäre nur, dass, da die Unterscheidung zweier Geschlechter, welche in je einer Classenperiode vereinigt sind, schon durch

die Wurzel -1 der Gleichung $\omega^{2m}=1$ herbeigeführt wird, die Glieder der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ auf die Hälfte zu reduciren sind.

4.

Es sei $H(-D)$ die Anzahl der Classen, in welche alle eigentlich ursprünglichen positiven quadratischen Formen mit der negativen Determinante $-D$ zerfallen; es soll der asymptotische Ausdruck der Summe $\sum_{1}^{G}{}_n H(-n)$ gefunden werden.

Man denke sich alle reducirten nicht eigentlich aequivalenten (ursprünglichen und abgeleiteten) positiven quadratischen Formen gebildet, welche den Determinanten

$$-1,\ -2,\ -3,\ \cdots\ -[x]$$

entsprechen und bezeichne

mit fx die Anzahl derjenigen unter diesen Formen, welche eigentlich ursprünglich sind,

mit Fx die Anzahl derjenigen Formen (a, b, c), in denen wenigstens einer der äusseren Coefficienten a, c ungerade ist,

mit $\varphi(s, x)$ die Anzahl derjenigen unter diesen Formen, in denen der mittlere Coefficient ohne Rücksicht auf das Zeichen den Werth s hat,

so wie endlich mit $\chi(s, x)$ die Anzahl derjenigen Formen (a, b, c), in denen die äusseren Coefficienten a, c beide gerade sind und der mittlere den Werth $\pm s$ hat.

Alsdann ist, wie leicht zu sehen,

$$(25.)\quad Fx = fx + f\frac{x}{3^2} + f\frac{x}{5^2} + \cdots,$$

und da der grösste Werth, den der mittlere Coefficient irgend einer dieser Formen haben kann, $=\left[\sqrt{\frac{x}{3}}\right]$ ist,

$$(26.)\quad Fx = \sum_{0}^{\sqrt{\frac{x}{3}}}{}_s (\psi(s, x) - \chi(s, x)).$$

Die Ausdrücke ψ und χ ergeben sich leicht, wenn man auf den Begriff einer reducirten Form zurückgeht. Eine quadratische Form (a, b, c)

von negativer Determinante $-D$ heisst reducirt und positiv, wenn $a \leqq c$, $2b \leqq a$ und überdies a und c positiv sind (Disquisitiones arithmeticae 171). Um daher sämmtliche reducirte nicht eigentlich aequivalente positive Formen einer gegebenen negativen Determinante $-D$ aufzustellen, deren mittlerer Coefficient einen gegebenen Zahlenwerth s hat, hat man, wofern $s \leqq \sqrt{\frac{D}{3}}$ ist, die Zahl $s^2 + D$ auf alle möglichen Weisen in zwei ganze positive Factoren a und c derart zu zerfällen, dass $a \leqq c$ ist, und aus jeder solchen Zerfällung, falls $s = 0$ ist, die Form $(a, 0, c)$, falls dagegen $s > 0$ ist, die zwei Formen (a, s, c), $(a, -s, c)$ zu bilden. Aus diesen so gebildeten Formen sind dann alle diejenigen auszuscheiden, in denen $a < 2s$ und welche nicht reducirt sind, so wie auch diejenigen reducirten Formen $(a, -s, c)$, in denen $a = 2s$ oder $a = c$ ist, weil eine solche Form der Form (a, s, c) eigentlich aequivalent ist. (Disq. arithm. 172.)

1°. Es sei $s = 0$. Man bilde alle Zerfällungen der in der Reihe

$$1, 2, 3, \cdots [x]$$

enthaltenen Zahlen in zwei positive Factoren a, c, von denen der erste den zweiten nicht übertrifft, und aus jeder derselben die Form $(a, 0, c)$. Bezeichnet $\mathfrak{T}m$ die Anzahl der Theiler der Zahl m, so ist die Anzahl derartiger Zerfällungen der Zahl m

$$= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}m + 1) \text{ oder } = \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}m,$$

je nachdem m ein Quadrat oder keines ist. Es ist daher

$$(27.) \quad \psi(0, x) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}1 + \mathfrak{T}2 + \cdots + \mathfrak{T}[x]) + \tfrac{1}{2}[\sqrt{x}]$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}x + \tfrac{1}{2}[\sqrt{x}],$$

wenn allgemein

$$\mathfrak{T}1 + \mathfrak{T}2 + \cdots + \mathfrak{T}[y] = \mathfrak{S}y$$

gesetzt wird.

Diejenigen unter diesen Formen $(a, 0, c)$, in denen a und c beide gerade sind, entspringen ausschliesslich aus den Zerfällungen der Zahlen

$$4, 8, \cdots 4\left[\frac{x}{4}\right]$$

und ihre Anzahl ist

$$\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{T}1 + \mathfrak{T}2 + \cdots + \mathfrak{T}\left[\frac{x}{4}\right]\right) + \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{x}{4}}\right],$$

so dass

$$(28.)\quad \chi(0,x) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\,\frac{x}{4} + \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{x}{4}}\right]$$

wird.

2°. Es sei $s > 0$. Da der kleinste Zahlenwerth einer Determinante, welcher reducirte Formen mit dem mittleren Coefficienten $\pm s$ entsprechen können, $= 3s^2$ ist, so hat man alle Zerfällungen der Zahlen

$$4s^2,\ 4s^2+1, \cdots s^2+[x]$$

in zwei positive Factoren a und c, von denen der erste den zweiten nicht übertrifft, und aus jeder derselben die Formen (a, s, c), $(a, -s, c)$ zu bilden. Der Complex dieser Formen heisse Ωs. Die Anzahl der in Ωs enthaltenen Formen ist

$$\mathfrak{T}4s^2 + \mathfrak{T}(4s^2+1) + \cdots + \mathfrak{T}(s^2+[x]) + [\sqrt{s^2+x}] - [\sqrt{4s^2-1}]$$

oder

$$(29.)\quad \mathfrak{S}(s^2+x) - \mathfrak{S}(4s^2-1) + [\sqrt{s^2+x}] - 2s + 1.$$

Hierauf sind alle diejenigen Formen auszuscheiden, in denen a einen der Werthe $1, 2, \cdots 2s-1$ hat. Bezeichnet e einen beliebigen dieser Werthe, so können Formen mit dem ersten Coefficienten e nur aus den Zerfällungen der Zahlen

$$e\left(1+\left[\frac{4s^2-1}{e}\right]\right),\ e\left(2+\left[\frac{4s^2-1}{e}\right]\right), \cdots e\left[\frac{s^2+x}{e}\right]$$

entspringen, und umgekehrt gehen aus den Zerfällungen jeder dieser Zahlen je zwei und nur zwei solche Formen hervor. Die Anzahl dieser Formen ist also

$$2\left[\frac{s^2+x}{e}\right] - 2\left[\frac{4s^2-1}{e}\right]$$

und somit die Anzahl aller Formen aus Ωs, in denen $a < 2s$ ist,

$$(30.)\quad \begin{cases} \quad 2\left(\left[\frac{s^2+x}{1}\right] + \left[\frac{s^2+x}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2+x}{2s-1}\right]\right) \\ -\,2\left(\left[\frac{4s^2-1}{1}\right] + \left[\frac{4s^2-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{4s^2-1}{2s-1}\right]\right). \end{cases}$$

Ferner sind aus Ωs noch diejenigen Formen $(a, -s, c)$ zu entfernen, in denen $a = 2s$ oder $= c$ ist. Die Anzahl der ersteren ist nach dem Vorhergehenden

$$\left[\frac{s^2+x}{2s}\right] - \left[\frac{4s^2-1}{2s}\right],$$

die der letzteren

$$[\sqrt{s^2+x}] - [\sqrt{4s^2-1}],$$

wobei zu bemerken ist, dass die Form $(2s, -s, 2s)$ unter den ersteren und letzteren mitgezählt worden ist. Hiernach ist also die Anzahl aller Formen $(a, -s, c)$ des Complexes Ωs, in denen $a = 2s$ oder $= c$ ist,

$$(31.)\quad \left[\frac{s^2+x}{2s}\right] + [\sqrt{s^2+x}] - 4s + 1$$

Aus (29.), (30.), (31.) ergiebt sich

$$\psi(s, x) = \mathfrak{S}(s^2+x) - \mathfrak{S}(4s^2-1) + 2s - \left[\frac{s^2+x}{2s}\right]$$
$$- 2\left(\left[\frac{s^2+x}{1}\right] + \left[\frac{s^2+x}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2+x}{2s-1}\right]\right)$$
$$+ 2\left(\left[\frac{4s^2-1}{1}\right] + \left[\frac{4s^2-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{4s^2-1}{2s-1}\right]\right).$$

Diese Formel vereinfacht sich noch bedeutend, wenn man die nach *Dirichlet* *) leicht zu beweisende Gleichung

$$(32.)\quad \mathfrak{S}z = 2\sum_{1}^{\sqrt{z}}{}_{n}\left[\frac{z}{n}\right] - [\sqrt{z}]^2$$

auf $\mathfrak{S}(4s^2-1)$ anwendet. Es ergiebt sich nämlich dann, da $2s-1$ die grösste in $\sqrt{4s^2-1}$ enthaltene ganze Zahl ist:

$$2\left(\left[\frac{4s^2-1}{1}\right] + \left[\frac{4s^2-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{4s^2-1}{2s-1}\right]\right) - \mathfrak{S}(4s^2-1) = (2s-1)^2$$

und daher

$$(33.)\quad \psi(s, x) = \mathfrak{S}(s^2+x) - 2\left(\left[\frac{s^2+x}{1}\right] + \left[\frac{s^2+x}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2+x}{2s-1}\right]\right)$$
$$- \left[\frac{s^2+x}{2s}\right] + 4s^2 - 2s + 1.$$

Die Formen des Complexes Ωs, in denen a und c beide gerade und bezüglich $= 2a'$, $2c'$ sind, erhält man ausschliesslich aus den Zerfällungen der Zahlen

$$4s^2,\ 4s^2+4, \cdots 4\left[\frac{s^2+x}{4}\right],$$

und findet die Anzahl derselben

$$= \mathfrak{T}s^2 + \mathfrak{T}(s^2+1) + \cdots + \mathfrak{T}\left[\frac{s^2+x}{4}\right] + \left[\sqrt{\frac{s^2+x}{4}}\right] - s + 1$$

*) Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie, Abhandlungen der Berliner Akademie, Jahrgang 1849.

oder

$$= \mathfrak{S}\left(\frac{s^2+x}{4}\right) - \mathfrak{S}(s^2-1) + \left[\sqrt{\frac{s^2+x}{4}}\right] - s + 1.$$

Die Anzahl derjenigen unter diesen Formen, in denen $2a' \leqq 2s$ oder $a' \leqq s$ ist, ist ähnlich wie oben

$$= 2\left(\left[\frac{s^2+x}{4}\right] + \left[\frac{s^2+x}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2+x}{4s}\right]\right) - 2\left(\left[\frac{s^2-1}{1}\right] + \left[\frac{s^2-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2-1}{s}\right]\right),$$

die Anzahl derjenigen Formen $(2a', -s, 2c')$, in welchen $a' = s$ ist,

$$= \left[\frac{s^2+x}{4s}\right] - \left[\frac{s^2-1}{s}\right],$$

endlich die Anzahl derjenigen Formen $(2a', -s, 2c')$, in welchen $a' = c'$ ist, mit Ausnahme der Form $(2s, -s, 2s)$

$$= \left[\sqrt{\frac{s^2+x}{4}}\right] - s.$$

Die Anzahl der aus den in Ωs vorkommenden Formen mit geraden äusseren Coefficienten auszuscheidenden Formen ist demnach

$$2\left(\left[\frac{s^2+x}{4}\right] + \left[\frac{s^2+x}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2+x}{4s}\right]\right) - 2\left(\left[\frac{s^2-1}{1}\right] + \left[\frac{s^2-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2-1}{s}\right]\right) - \left[\frac{s^2+x}{4s}\right] - \left[\sqrt{\frac{s^2+x}{4}}\right] - 1.$$

Hiernach wird

$$\chi(s,x) = \mathfrak{S}\left(\frac{s^2+x}{4}\right) - \mathfrak{S}(s^2-1) - 2\left(\left[\frac{s^2+x}{4}\right] + \left[\frac{s^2+x}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2+x}{4s}\right]\right) + 2\left(\left[\frac{s^2-1}{1}\right] + \left[\frac{s^2-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2-1}{s}\right]\right) + \left[\frac{s^2+x}{4s}\right] - s + 2,$$

und da nach (32.) (auch für $s = 1$)

$$-\mathfrak{S}(s^2-1) + 2\left(\left[\frac{s^2-1}{1}\right] + \left[\frac{s^2-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2-1}{s}\right]\right) = 2\left[\frac{s^2-1}{s}\right] + (s-1)^2$$

ist, so findet man einfacher

$$(34.)\quad \begin{cases} \chi(s,x) = \mathfrak{S}\left(\frac{s^2+x}{4}\right) - 2\left(\left[\frac{s^2+x}{4}\right] + \left[\frac{s^2+x}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{s^2+x}{4s}\right]\right) \\ \qquad + \left[\frac{s^2+x}{4s}\right] + s^2 - s + 1. \end{cases}$$

Soll $\psi(s, x)$ oder $\chi(s, x)$ für gegebene Werthe von s und x wirklich berechnet werden, so ist es vortheilhaft, auf $\mathfrak{S}(s^2+x)$ und $\mathfrak{S}\left(\frac{s^2+x}{4}\right)$ die Formel (32.) anzuwenden. Man erhält auf diese Weise

$$\psi(0, x) = \sum_1^{\sqrt{x}}{}_n \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}[\sqrt{x}]^2 + \frac{1}{2}[\sqrt{x}]$$

$$\chi(0, x) = \sum_1^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{}_n \left[\frac{x}{4n}\right] - \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{x}{4}}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{x}{4}}\right],$$

$$\psi(s, x) = 2\sum_{2s}^{\sqrt{s^2+x}}{}_n \left[\frac{s^2+x}{n}\right] - \left[\frac{s^2+x}{2s}\right] + 4s^2 - 2s + 1 - [\sqrt{s^2+x}]^2,$$

$$\chi(s, x) = 2\sum_{s}^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+x}}{}_n \left[\frac{s^2+x}{4n}\right] - \left[\frac{s^2+x}{4s}\right] + s^2 - s + 1 - \left[\sqrt{\frac{s^2+x}{4}}\right]^2.$$

Da

$$1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2s-1} + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{2s} = \log 2s + \mathfrak{C} - \frac{\lambda}{48s^2}$$

und bis auf einen Fehler von der Ordnung $\sqrt{x}$

$$\mathfrak{S}(s^2+x) = (s^2+x)(\log(s^2+x) + 2\mathfrak{C} - 1)$$

ist, wo $\mathfrak{C}$ die *Euler*sche Constante vorstellt und λ die Einheit nicht übersteigt, so findet man bis auf Grössen derselben Ordnung

$$\psi(0, x) = \tfrac{1}{2}x(\log x + 2\mathfrak{C} - 1)$$

$$\psi(s, x) = (s^2+x)\log\left(\frac{s^2+x}{4s^2}\right) + 3s^2 - x - \lambda\left(\frac{s^2+x}{24s^2}\right).$$

Hiernach wird nach einer bekannten Formel, bis auf einen Fehler von der Ordnung x

$$\sum_1^{\sqrt{\frac{x}{3}}}{}_s\, \psi(s, x) = \int_1^{\sqrt{\frac{x}{3}}} (s^2+x)\log\left(\frac{s^2+x}{4s^2}\right) ds + \tfrac{1}{2}(1+x)\log\left(\frac{1+x}{4}\right) - \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}},$$

$$\sum_0^{\sqrt{\frac{x}{3}}}{}_s\, \psi(s, x) = \int_1^{\sqrt{\frac{x}{3}}} (s^2+x)\log\left(\frac{s^2+x}{4s^2}\right) ds + x\log x - \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}.$$

Durch partielle Integration ergiebt sich aber

$$\int (s^2+x)\log\frac{s^2+x}{4s^2}\,ds = (\tfrac{1}{3}s^3 + sx)\log\left(\frac{s^2+x}{4s^2}\right) + \frac{2x}{3}\int\frac{s^2+3x}{s^2+x}\,ds$$

$$= (\tfrac{1}{3}s^3 + sx)\log\left(\frac{s^2+x}{4s^2}\right) + \frac{2xs}{3} + \frac{4}{3}x\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{\sqrt{x}},$$

$$\int_1^{\sqrt{\frac{x}{3}}} (s^2 + x) \log\left(\frac{s^2+x}{4s^2}\right) ds = -\left(\tfrac{1}{3} + x\right) \log\left(\frac{1+x}{4}\right) + \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}$$
$$+ \frac{2\pi}{9}\, x\sqrt{x} - \frac{2x}{3} - \frac{4}{3}\, x\sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Es ist daher bis auf Grössen von der Ordnung x

$$\sum_0^{\sqrt{\frac{x}{3}}}{}_s\, \psi(s, x) = \frac{2\pi}{9}\, x^{\frac{3}{2}}.$$

Ebenso findet man

$$\sum_0^{\sqrt{\frac{x}{3}}}{}_s\, \chi(s, x) = \frac{\pi}{18}\, x^{\frac{3}{2}}.$$

Nach (26) kann also

$$Fx = \frac{\pi}{6}\, x^{\frac{3}{2}} + \mathfrak{H} x$$

gesetzt werden, wo $\mathfrak{H}$ beständig unter einer angebbaren Grenze bleibt.

Die Function fx lässt sich durch Fx ausdrücken, wenn man in (25.) statt x der Reihe nach $x, \frac{x}{3^2}, \frac{x}{5^2}, \cdots$ setzt und sodann die Gleichungen

$$\begin{aligned} Fx &= fx + f\frac{x}{3^2} + f\frac{x}{5^2} + f\frac{x}{7^2} + f\frac{x}{9^2} + \cdots \\ F\frac{x}{3^2} &= \qquad f\frac{x}{3^2} \qquad\qquad\qquad + f\frac{x}{9^2} + \cdots \\ F\frac{x}{5^2} &= \qquad\qquad f\frac{x}{5^2} \qquad\qquad\qquad + \cdots \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

nach fx auflöst. Zu diesem Ende hat man nur nöthig, dieselben der Reihe nach mit $\mu 1, \mu 3, \mu 5, \cdots$ zu multipliciren, wo μn die in 1 festgesetzte Bedeutung hat, und hierauf zu addiren.

Auf diese Weise ergiebt sich auf alle ungeraden Zahlen f von 1 bis x bezogen

$$fx = \sum_1^x \mu f\, F\frac{x}{f^2}.$$

Da nun

$$F\frac{x}{f^2} = \frac{\pi}{6}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{f^3} + \frac{\mathfrak{H} x}{f^2}$$

gefunden worden ist, so wird

$$fx = \frac{\pi}{6}\, x^{\frac{3}{2}} \sum_1^{x} \frac{\mu f}{f^3} + x \sum_1^{x} \frac{\mathfrak{H}}{f^2}$$

und bis auf einen Fehler von der Ordnung x

$$fx = \frac{\pi}{6}\, x^{\frac{3}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{\mu f}{f^3}$$

$$= \frac{\pi}{6}\, x^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\left(1 - \frac{1}{5^3}\right)\left(1 - \frac{1}{7^3}\right)\left(1 - \frac{1}{11^3}\right) \cdots$$

Wird nun der Werth der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots \text{ in inf.}$$

mit S_3 bezeichnet, so ist

$$S_3 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} \; \frac{1}{1 - \frac{1}{3^3}} \; \frac{1}{1 - \frac{1}{5^3}} \cdots,$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\left(1 - \frac{1}{5^3}\right)\left(1 - \frac{1}{7^3}\right) \cdots = \frac{8}{7 S_3}$$

und daher

$$fx = \frac{4\pi}{21 S_3}\, x^{\frac{3}{2}}$$

Es ist also der gesuchte asymptotische Ausdruck

$$\sum_1^{G}{}_n H(-n) = fG = \frac{4\pi}{21 S_3}\, G^{\frac{3}{2}}.$$

Für die mittlere Classenzahl in der Nähe von G würde man also den Ausdruck $\frac{2\pi\sqrt{G}}{7 S_3}$ finden. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von demjenigen, welchen *Gauss* im 301. Artikel der Disquisitiones arithmeticae giebt, nur um die Constante δ, welche indessen an einem andern Orte (*Gauss* Werke Bd. II. S. 284) wieder fortgelassen worden ist.

5.

Es sei in der Theorie der complexen Zahlen von der Form $a + bi$ φm die Anzahl derjenigen Zahlen eines vollständigen Restsystems für den Modul m, welche mit m keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und ΩG der Inbegriff sämmtlicher ganzen complexen Zahlen mit Ausnahme der Null, deren Normen $\leqq G$ sind; es soll der asymptotische Ausdruck der über alle Glieder von ΩG zu erstreckenden Summe $\sum_1^{G} \varphi m$ bestimmt werden.

Es sei μm eine derart von m abhängige Zahl, dass $1^0.\ \mu m = 0$ ist, wenn m quadratische complexe Theiler (ausser ± 1) zulässt, $2^0.\ \mu m = 1$ ist, wenn $m = 1, i, -1, -i$ oder aus einer geraden Anzahl verschiedener complexer Primfactoren zusammengesetzt ist, und $3^0.\ \mu m = -1$ ist, wenn m aus einer ungeraden Anzahl verschiedener complexer Primfactoren besteht. Ist m in seine complexen Primfactoren zerlegt $= i^\lambda a^\alpha b^\beta \cdots$, so hat man bekanntlich *)

$$(35.)\quad \varphi m = Nm\left(1-\frac{1}{Na}\right)\left(1-\frac{1}{Nb}\right)\cdots$$
$$= \Sigma \mu\, T N\left(\frac{m}{T}\right),$$

wo das Summenzeichen auf alle primären complexen Theiler T von m zu beziehen ist. Als primär gelte eine complexe ungerade Zahl dann, wenn dieselbe $\equiv 1 \pmod{2+2i}$, eine complexe gerade Zahl hingegen dann, wenn dieselbe von der Form $m'(1+i)^\lambda$ und m' eine primäre ungerade Zahl ist.

In der Gleichung (35.) werde statt m nach und nach jede Zahl aus ΩG gesetzt und hierauf die Summe aller dieser Gleichungen gebildet. Um das Resultat übersichtlich zu ordnen, ziehe man alle mit dem irgend einer bestimmten primären Zahl n aus ΩG entsprechenden Factor μn behafteten Bestandtheile in ein Glied zusammen. Da die Gleichungen, in denen ein Glied von der Form $\mu n\, N\left(\frac{m}{n}\right)$ vorkommt, denjenigen Zahlen m entsprechen, welche complexe Vielfache von n sind und daher durch Multiplication sämmtlicher Zahlen aus $\Omega\left(\frac{G}{Nn}\right)$ mit n entstehen, so ist das gesuchte Glied $= \sum_1^{\frac{G}{Nn}} Nm$, und man hat

$$(36.)\quad \sum_1^G \varphi m = \sum_1^G \mu n \sum_1^{\frac{G}{Nn}} Nm,$$

wo das äussere Summenzeichen sich auf alle primären Zahlen von ΩG bezieht.

*) Dirichlet, Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes, dieses Journal XXIV.

Es handelt sich jetzt zunächst um die näherungsweise Bestimmung einer Summe von der Form $\sum\limits_1^x Nm$.

Da eine reelle positive ganze Zahl s so oft als Norm einer ganzen complexen Zahl auftreten kann, als die über alle ungeraden (reellen) Theiler d von s zu erstreckende Summe $4\sum(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$ beträgt, so hat man

$$\sum_1^x Nm = 4\sum_1^x{}_{s}\, s\ \sum(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$$

und nach Umkehrung der Reihenfolge der Summationen

$$\sum_1^x Nm = 4\sum_1^x(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}(f,\, x),$$

wo f alle ungeraden Zahlen von 1 bis x zu durchlaufen hat und die Summe sämmtlicher unter x liegender Vielfachen der Zahl f zur Abkürzung mit $(f,\, x)$ bezeichnet ist. Setzt man ferner $[\sqrt{x}] = l$, $\left[\frac{x}{f}\right] = \frac{x}{f} - r_f$ und die Summe derjenigen Glieder der Reihe

$$1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9,\ -11,\ \cdots,$$

deren Zahlenwerth nicht grösser als y ist, $= Fy$, so lässt sich die Summe $\sum\limits_1^x(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}(f,\, x)$ in folgender Weise zerlegen,

$$\begin{aligned}\sum_1^x(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}(f,\, x) &= \sum_1^l(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}(f,\, x) + Fx - F\frac{x}{2} + 3\left(F\frac{x}{2} - F\frac{x}{3}\right)\\ &\qquad + \cdots + \frac{l(l+1)}{2}\left(F\frac{x}{l} - Fl\right)\\ &= \sum_1^l(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}(f,\, x) + Fx + 2F\frac{x}{2} + \cdots + lF\frac{x}{l} - \tfrac{1}{2}l(l+1)\,Fl,\end{aligned}$$

und da

$$\begin{aligned}(f,\, x) &= f\left(1 + 2 + \cdots + \left[\frac{x}{f}\right]\right) = \tfrac{1}{2}f\left(\left[\frac{x}{f}\right]^2 + \left[\frac{x}{f}\right]\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{f} + (\tfrac{1}{2} - r_f)\,x - \tfrac{1}{2}r_f(1 - r_f)f,\end{aligned}$$

so hat man

$$\sum_1^x Nm = 2x^2\sum_1^\infty\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f} + \mathfrak{R},$$

wo

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = &-2x^2\sum_{1+l}^\infty\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f} + 4x\sum_1^l(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}(\tfrac{1}{2} - r_f) - 2\sum_1^l(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}r_f(1-r_f)f\\ &+ 4\left(Fx + 2F\frac{x}{2} + \cdots + lF\frac{x}{l}\right) - 2l(l+1)\,Fl\end{aligned}$$

ist. Es ist aber ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$-2x^{\frac{3}{2}}\sum_{1+l}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}-2l(l+1)Fl < 2x^{\frac{3}{2}}+x+\sqrt{x}$$

$$4x\sum_{1}^{l}(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}(\tfrac{1}{2}-r_f) \qquad < x^{\frac{3}{2}}+x$$

$$4\left(Fx+F\frac{x}{2}+\cdots\right) \qquad < 2\left\{1+x+2\left(1+\frac{x}{2}\right)+\cdots+l\left(1+\frac{x}{l}\right)\right\}$$

$$< 2x^{\frac{3}{2}}+x+\sqrt{x}$$

$$2\sum_{1}^{l}(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}r_f(1-r_f)f \qquad < \tfrac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)^2$$

und daher

$$(37.)\quad \mathfrak{R} < 5x^{\frac{3}{2}}+\frac{25}{8}x+\frac{9}{4}\sqrt{x}+\frac{1}{8}.$$

Man kann demnach

$$\sum_{1}^{x}Nm = \frac{\pi}{2}x^2+\mathfrak{H}x^{\frac{3}{2}}$$

setzen, wo der Zahlenwerth von $\mathfrak{H}$ nach (37.) nie eine gewisse angebbare Constante $\mathfrak{H}^0$ übersteigen kann. Wird dieser Ausdruck in die Gleichung (36.) eingesetzt, so lässt sich das Resultat auf die Form

$$\sum_{1}^{G}\varphi m = \frac{\pi}{2}G^2\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu n}{Nn^2}-\frac{\pi}{2}G^2\sum_{1+[G]}^{\infty}\frac{\mu n}{Nn^2}+G^{\frac{3}{2}}\sum_{1}^{G}\frac{\mathfrak{H}\mu n}{Nn^{\frac{3}{2}}}$$

bringen, worin es nur noch einer Vereinfachung der einzelnen Glieder bedarf.

Da allgemein, wenn n, n' zwei zu einander theilerfremde complexe Zahlen bedeuten, $\mu n\cdot\mu n' = \mu nn'$ ist, so hat man über alle complexen Primzahlen q, $1+i$ mit inbegriffen, erstreckt

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu n}{Nn^2} = \Pi\left(1+\frac{\mu q}{Nq^2}\right) = \Pi\left(1-\frac{1}{Nq^2}\right).$$

Scheidet man in diesem Producte die eingliedrigen Primzahlen von den zweigliedrigen und bezeichnet allgemein mit p jede ungerade reelle Primzahl, mit $\mathfrak{p}$ jede reelle Primzahl von der Form $4h+1$, mit $\mathfrak{q}$ jede Primzahl von der Form $4h+3$ und mit $\mathfrak{L}$ den Werth der Reihe

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots,$$

so ergiebt sich durch leichte Umgestaltungen

$$\Pi\left(1-\frac{1}{Nq^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\Pi\left(1-\frac{1}{\mathfrak{p}^2}\right)^2\Pi\left(1-\frac{1}{\mathfrak{q}^4}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\Pi\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\Pi\left(1-\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{p^2}\right)$$
$$=\frac{6}{\mathfrak{L}\pi^2}.$$

Ferner ist ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\sum_1^G\frac{\mathfrak{H}\mu n}{Nn^{\frac{3}{2}}}<\mathfrak{H}^0\sum_1^\infty\frac{1}{Nn^{\frac{3}{2}}}$$
$$\sum_{1+[G]}^\infty\frac{\mu n}{Nn^2}<\sum_{1+[G]}^\infty\frac{1}{Nn^2}$$
$$<\sum_{1+[G]}^\infty{}_s\frac{1}{s^2}\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$$
$$<\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{k^2}\sum_{1+\left[\frac{G}{k}\right]}^\infty\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f^2}$$
$$<\sum_1^G\frac{1}{k^2\left(1+\left[\frac{G}{k}\right]\right)^2}+\mathfrak{L}\sum_{1+[G]}^\infty\frac{1}{k^2}$$
$$<\frac{1+\mathfrak{L}}{G}+\frac{\mathfrak{L}}{G^2}.$$

Der gesuchte asymptotische Ausdruck ist sonach

$$\sum_1^G\varphi m=\frac{3}{\mathfrak{L}\pi}G^2+\Delta,$$

wo

$$\Delta<G^{\frac{3}{2}}\mathfrak{H}^0\sum_1^\infty\frac{1}{Nn^{\frac{3}{2}}}+\pi\,\frac{(1+\mathfrak{L})}{2}\,G+\frac{\pi\mathfrak{L}}{2}.$$

Die Zahl $\mathfrak{L}$ lässt sich bequem mittelst der Formel

$$\mathfrak{L}=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{4^2}\left(S_3-1-\frac{1}{2^3}\right)-\frac{2}{4^4}\left(S_5-1-\frac{1}{2^5}\right)$$
$$-\frac{3}{4^6}\left(S_7-1-\frac{1}{2^7}\right)-\cdots,$$

worin

$$S_3=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$
$$S_5=1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

berechnen und lautet auf 10 Decimalstellen genau

$$\mathfrak{L}=0\cdot9159655941.$$

6.

Es bezeichne $\mathfrak{T}m$ die Anzahl aller Theiler der ganzen complexen Zahl m von der Form $a+bi$; es soll der asymptotische Ausdruck der über alle Zahlen des Complexes ΩG, welcher die nämliche Bedeutung wie in dem vorhergehenden Abschnitte hat, auszudehnenden Summe $\Sigma\mathfrak{T}m$ bestimmt werden.

Ist m eine bestimmte Zahl aus ΩG und stellen k, k', ... alle Zahlen des Complexes $\Omega\left(\frac{G}{Nm}\right)$ vor, so kommt in den Gliedern

$$\mathfrak{T}km,\ \mathfrak{T}k'm,\ \ldots$$

der Summe $\Sigma\mathfrak{T}m$ je eine dem Theiler m entsprechende Einheit vor. Durch Zusammenfassung dieser Einheiten erhält man, wenn allgemein die Anzahl der Glieder des Complexes Ωx mit $\mathfrak{A}x$ bezeichnet wird, über alle Zahlen m aus ΩG erstreckt

$$\Sigma\mathfrak{T}m = \Sigma\mathfrak{A}\left(\frac{G}{Nm}\right).$$

Es sei ferner g die grösste in $\sqrt{G}$ enthaltene ganze Zahl und es werde unter $\sum\limits_A^B fm$ die Summe der sämmtlichen ganzen complexen Zahlen, deren Norm zwischen A und B mit Einschluss beider Grenzen liegt, entsprechenden Ausdrücke fm verstanden. Zerlegt man die Summe $\sum\limits_1^G \mathfrak{A}\left(\frac{G}{Nm}\right)$, wie folgt

$$(38.)\quad \sum_1^g \mathfrak{A}\left(\frac{G}{Nm}\right) + \sum_{g+1}^G \mathfrak{A}\left(\frac{G}{Nm}\right),$$

so lässt sich die zweite dieser Theilsummen umgestalten, wenn man zunächst alle diejenigen Glieder zusammenfasst, in welchen m die Bedingungen

$$1 \leqq \frac{G}{Nm} < 2 \text{ oder } \frac{G}{2} < Nm \leqq G$$

erfüllt; die Summe dieser Glieder ist $=\mathfrak{A}1\left(\mathfrak{A}G - \mathfrak{A}\frac{G}{2}\right)$. Hierauf vereinige man diejenigen Glieder, in welchen

$$2 \leqq \frac{G}{Nm} < 3 \text{ oder } \frac{G}{3} < Nm \leqq \frac{G}{2}$$

und deren Summe $=\mathfrak{A}2\left(\mathfrak{A}\frac{G}{2} - \mathfrak{A}\frac{G}{3}\right)$ ist. Auf diese Weise fahre man

fort und bilde zuletzt aus allen Gliedern, in welchen

$$g \leqq \frac{G}{Nm} \text{ oder } g < Nm \leqq \frac{G}{g}$$

ist, die Summe $\mathfrak{A}g\left(\mathfrak{A}\frac{G}{g} - \mathfrak{A}g\right)$. Es wird also hiernach

$$\sum_{1+g}^{G} \mathfrak{A}\frac{G}{Nm} = \mathfrak{A}1\left(\mathfrak{A}G - \mathfrak{A}\frac{G}{2}\right) + \mathfrak{A}2\left(\mathfrak{A}\frac{G}{2} - \mathfrak{A}\frac{G}{3}\right)$$

$$+ \cdots + \mathfrak{A}g\left(\mathfrak{A}\frac{G}{g} - \mathfrak{A}g\right)$$

$$= \mathfrak{A}1\,\mathfrak{A}G + (\mathfrak{A}2 - \mathfrak{A}1)\,\mathfrak{A}\frac{G}{2}$$

$$+ \cdots + (\mathfrak{A}g - \mathfrak{A}(g-1))\,\mathfrak{A}\frac{G}{g} - (\mathfrak{A}g)^2$$

$$= \sum_1^g \mathfrak{A}\frac{G}{Nm} - (\mathfrak{A}g)^2$$

und nach (38.)

$$(39.)\quad \Sigma\mathfrak{T}m = 2\sum_1^{\sqrt{G}} \mathfrak{A}\frac{G}{Nm} - (\mathfrak{A}\sqrt{G})^2.$$

Für $\mathfrak{A}x$ hat man den Ausdruck

$$\mathfrak{A}x = \pi x + C\sqrt{x},$$

worin der Zahlenwerth von C nie eine gewisse angebbare Constante C^0 übersteigen kann. Wird dieser Ausdruck in (39.) eingesetzt, so ergiebt sich

$$(40.)\quad \Sigma\mathfrak{T}m = 2\pi G\sum_1^{\sqrt{G}}\frac{1}{Nm} - \pi^2 G + \mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{R} = 2\sqrt{G}\sum_1^{\sqrt{G}}\frac{C}{\sqrt{Nm}} - 2\pi C G^{\frac{3}{4}} - C^2\sqrt{G},$$

und da

$$\sum_1^{\sqrt{G}}\frac{C}{\sqrt{Nm}} < 4C^0\sum_1^{\sqrt{G}}\frac{1}{\sqrt{s}}\,\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$$

$$< 4C^0\sum_1^{\sqrt{G}}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{\sqrt{f}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{g}{f}\right]}}\right)$$

$$< 4C^0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{g}}\right)$$

$$< 8C^0 G^{\frac{1}{4}}$$

ist, so wird $\mathfrak{R}$ von der Ordnung $G^{\frac{3}{4}}$ sein.

Es handelt sich demnach nur noch um die Bestimmung einer Summe von der Form $\sum\limits_1^x \frac{1}{Nm}$. Zu diesem Ende bezeichne l die grösste in $\sqrt{x}$ enthaltene ganze Zahl und Fy die Summe der Glieder der Reihe

$$1, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{7}, \cdots$$

deren Nenner nicht grösser als y sind. Macht man wieder von dem Ausdrucke für die Anzahl der Darstellungen einer ganzen positiven Zahl s durch die Form $x^2 + y^2$ Gebrauch, so erhält man

$$\sum_1^x \frac{1}{Nm} = 4\sum_1^x \frac{1}{s}\,\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$$
$$= 4\sum_1^x \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x),$$

wo f alle ungeraden Zahlen von 1 bis x zu durchlaufen hat und zur Abkürzung

$$1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{x}{f}\right]} = (f, x)$$

gesetzt worden ist. Es ist aber

$$\sum_1^x \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x) = \sum_1^l \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x) + \sum_{l+1}^x \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x)$$
$$= \sum_1^l \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x) + Fx - F\frac{x}{2}$$
$$+ (1 + \tfrac{1}{2})\left(F\frac{x}{2} - F\frac{x}{3}\right) + \cdots$$
$$+ (1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{l})\left(F\frac{x}{l} - Fl\right)$$
$$= \sum_1^l \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x) + Fx + \tfrac{1}{2}F\frac{x}{2} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{l}F\frac{x}{l} - (1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{l})\,Fl,$$

und da

$$Fy = \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{y},$$
$$(f, x) = \log\frac{x}{f} + \mathfrak{C} + \frac{\lambda' f}{x},$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{l} = \tfrac{1}{2}\log x + \mathfrak{C} + \frac{\lambda''}{\sqrt{x}},$$

wo die Zahlenwerthe von $\lambda, \lambda', \lambda''$ die Einheit nicht übersteigen, so wird

$$\sum_1^x \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x) = \sum_1^l \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}\left(\log\frac{x}{f} + \mathfrak{E}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - Fl\right)\left(\tfrac{1}{2}\log x + \mathfrak{E}\right) + \mathfrak{R}'$$

und ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\mathfrak{R}' < \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

Andrerseits ist, wenn n eine grosse Zahl bezeichnet,

$$\begin{aligned}
\sum_{l+1}^n \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}\left(\log\frac{x}{f} + \mathfrak{E}\right) &= \sum_{1+l}^n{}_s \,(Fs - F(s-1))\left(\log\frac{x}{s} + \mathfrak{E}\right) \\
&= -Fl\left(\log\frac{x}{1+l} + \mathfrak{E}\right) + Fn\left(\log\frac{x}{1+n} + \mathfrak{E}\right) \\
&\quad + \sum_{1+l}^n Fs \log\left(1 + \frac{1}{s}\right) \\
&= -Fl\left(\log\frac{x}{1+l} + \mathfrak{E}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\log\frac{x}{1+n} + \mathfrak{E}\right) \\
&\quad + \frac{\pi}{4}\sum_{1+l}^n (\log(s+1) - \log s) \\
&\quad + \left(Fn - \frac{\pi}{4}\right)\left(\log\frac{x}{1+n} + \mathfrak{E}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda'}{x} \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - Fl\right)\left(\log\frac{x}{1+l} + \mathfrak{E}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda'}{x} \\
&\quad + \left(Fn - \frac{\pi}{4}\right)\left(\log\frac{x}{1+n} + \mathfrak{E}\right)
\end{aligned}$$

und daher für $n = \infty$

$$\sum_{l+1}^\infty \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}\left(\log\frac{x}{f} + \mathfrak{E}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - Fl\right)\left(\log\frac{x}{1+l} + \mathfrak{E}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda'}{x}.$$

Man hat demnach

$$\sum_1^x \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}(f, x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f}\left(\log\frac{x}{f} + \mathfrak{E}\right) + \mathfrak{R}'',$$

wo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}'' &= \mathfrak{R}' + \left(\frac{\pi}{4} - Fl\right)\log\frac{1+l}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda'}{x} \\
&< \frac{4+\log 2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

ist. Setzt man also

$$\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 7}{7} - \frac{\log 9}{9} + \cdots = \mathfrak{M},$$

so wird bis auf einen Fehler von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\sum_{1}^{x} \frac{1}{Nm} = \pi \log x + \pi \mathfrak{C} + 4\mathfrak{M}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes findet man aus (40.)

$$(41.)\quad \Sigma \mathfrak{T} m = \pi^2 G\left(\log G + 2\mathfrak{C} + \frac{8\mathfrak{M}}{\pi} - 1\right) + \Delta,$$

wo Δ von der Ordnung $G^{\frac{1}{2}}$ ist.

Wäre die Bedingung vorgeschrieben, dass bei der Zählung nur primäre Theiler berücksichtigt werden sollen, so würde der Ausdruck (41.) durch 4 zu dividiren sein.

7.

Es sei die Anzahl derjenigen Theiler einer ganzen complexen Zahl m von der Form $a + bi$, welche durch kein Quadrat ausser ± 1 theilbar sind, $= \psi m$; man soll den asymptotischen Ausdruck der über alle Zahlen von ΩG auszudehnenden Summe $\Sigma \psi m$ bestimmen.

Bildet man unter Beibehaltung aller Bezeichnungen der vorhergehenden zwei Abschnitte die über alle primären Theiler d einer gegebenen ganzen complexen Zahl n zu erstreckende Summe $\Sigma \mu d$, so ist dieselbe immer $= 0$, ausgenommen wenn $n = i^{\varrho}$ ist. Enthält nämlich n wenigstens eine primäre complexe Primzahl q als Factor und man setzt $n = q^k n'$, wo n' nicht mehr durch q theilbar ist, so erhält man alle primären Theiler von n, wenn jeder primäre Theiler δ von q^k mit jedem primären Theiler δ' von n' multiplicirt wird, und da überdies $\mu\delta\delta' = \mu\delta\,\mu\delta'$ ist, so hat man

$$\Sigma \mu d = \Sigma \mu \delta \cdot \Sigma \mu \delta'.$$

Es ist aber

$$\Sigma \mu \delta = 1 + \mu q = 1 - 1 = 0$$

und somit

$$\Sigma \mu d = 0.$$

Ist hingegen $n = i^{\varrho}$, so besitzt n nur den einen primären Theiler 1 und es wird

$$\Sigma \mu d = \mu 1 = 1.$$

Dies vorausgeschickt, sei T irgend ein bestimmter Theiler der Zahl

m und Q^2 das grösste in demselben aufgehende Quadrat. Bezieht man das Summenzeichen auf alle primären Theiler d von Q, so ist allgemein

$$\mu^2 T = \Sigma \mu d.$$

Diese Gleichung werde in Bezug auf alle Theiler T der Zahl m summirt. Es ist dann einerseits

$$\Sigma \mu^2 T = \psi m$$

und andrerseits kommt der einem bestimmten quadratischen Theiler d^2 von m entsprechende Factor μd genau so oft vor, als die Zahl $\frac{m}{d^2}$ Theiler besitzt, d. h. $\mathfrak{T}\left(\frac{m}{d^2}\right)$ mal. Man hat daher

$$(42.) \quad \psi m = \Sigma \mu d \mathfrak{T} \frac{m}{d^2}.$$

Wird die Gleichung (42.) für jede Zahl m aus ΩG gebildet und hierauf die Summe aller so erhaltenen Gleichungen genommen, so ergiebt sich durch Zusammenziehung der mit dem nämlichen Factor μn behafteten Glieder

$$\Sigma \psi m = \Sigma \mu n \sum_1^{\frac{G}{Nn^2}} \mathfrak{T} m;$$

die äussere Summation umfasst hierin alle primären Zahlen aus $\Omega \sqrt{G}$.

Nach (41.) kann

$$\sum_1^{\frac{G}{Nn^2}} \mathfrak{T} m = \frac{\pi^2 G}{Nn^2} \left(\log \frac{G}{Nn^2} + 2\mathfrak{C} + \frac{8\mathfrak{M}}{\pi} - 1\right) + \mathfrak{H} \frac{G^{\frac{1}{2}}}{(Nn)^{\frac{1}{2}}}$$

gesetzt werden, wo der absolute Werth von $\mathfrak{H}$ beständig unter einer angebbaren Grenze $\mathfrak{H}^0$ bleibt. Mit Hülfe dieses Ausdruckes wird

$$\Sigma \psi m = \pi^2 G \sum_1^{\infty} \frac{\mu n}{Nn^2} \left(\log G - 2 \log Nn + 2\mathfrak{C} + \frac{8\mathfrak{M}}{\pi} - 1\right) + \Delta,$$

wo

$$\Delta = G^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\sqrt{G}} \frac{\mu n \mathfrak{H}}{(Nn)^{\frac{1}{2}}} - \pi^2 G \sum_{1+g}^{\infty} \frac{\mu n}{Nn^2} \left(\log \frac{G}{Nn^2} + 2\mathfrak{C} + \frac{8\mathfrak{M}}{\pi} - 1\right)$$

und $g = [\sqrt{G}]$ ist. Durch eine genauere Untersuchung findet man leicht, dass Δ von der Ordnung $G^{\frac{1}{2}}$ ist. Erwägt man ferner, dass, wofern $a > 1$ ist,

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{s^a} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f^a} \Pi\left(1 - \frac{1}{(Nq)^a}\right) = 1$$

oder

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{s}\frac{1}{s^a}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f^a}\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu n}{(Nn)^a}=1$$

ist, so erhält man durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung nach a

$$0=\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\log s}{s^a}}{\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{s^a}}+\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}\log f}{f^a}}{\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)}}{f^a}}+\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\mu n\log Nn}{(Nn)^a}}{\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\mu n}{(Nn)^a}}$$

und für $a=2$

$$-\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu n\log Nn}{Nn^2}=\frac{36\mathfrak{F}}{\mathfrak{L}\pi^4}-\frac{6\mathfrak{N}}{\mathfrak{L}^2\pi^2};$$

hierin ist

$$\mathfrak{F}=\frac{\log 2}{2^2}+\frac{\log 3}{3^2}+\frac{\log 4}{4^2}+\cdots$$

$$\mathfrak{L}=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots$$

$$\mathfrak{N}=\frac{\log 3}{3^2}-\frac{\log 5}{5^2}+\frac{\log 7}{7^2}-\frac{\log 9}{9^2}+\cdots$$

Der gesuchte asymptotische Ausdruck lautet demnach bis auf einen Fehler von der Ordnung $G^{\frac{1}{2}}$

$$\Sigma\psi m=\frac{6}{\mathfrak{L}}G\Big(\log G+\frac{12\mathfrak{F}}{\pi^2}-\frac{2\mathfrak{N}}{\mathfrak{L}}+2\mathfrak{C}+\frac{8\mathfrak{M}}{\pi}-1\Big).$$

8.

Es seien k, l zwei gegebene complexe Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor, von denen überdies die erste primär ist; es soll der asymptotische Ausdruck der Summe der reciproken Normen aller ungeraden complexen in der Form $kt+l$ enthaltenen Primzahlen, deren Norm die gegebene Grenze G nicht übersteigt, bestimmt werden.

Da es zur Lösung dieser Aufgabe hinreicht, die Summe der reciproken Normen aller primären ungeraden complexen Primzahlen zu kennen, welche in je einer der vier Formen $kt+l$, $kt-il$, $kt-l$, $kt+il$ enthalten und deren Normen nicht grösser als G sind, so kann man sich auf den Fall beschränken, wo nur die primären durch die Form $kt+l$ ausdrückbaren complexen Primzahlen berücksichtigt werden.

Ferner kann, ohne die Allgemeinheit aufzugeben, vorausgesetzt wer-

den, dass l eine ungerade primäre Zahl und k wenigstens durch die dritte Potenz von $(1 + i)$ theilbar ist.

Ist nämlich k ungerade, so lässt sich immer eine ungerade primäre Zahl l' derart bestimmen, dass $l' \equiv l \pmod{k}$ ist; da überdies der Ausdruck $kt + l'$ nur dann eine ungerade primäre Zahl darstellen kann, wenn t durch $(1 + i)^3$ theilbar ist, so ist es klar, dass die Linearform $kt + l$ durch $(1 + i)^3 kt + l'$ ersetzt werden kann, ohne an den Bedingungen der Aufgabe etwas zu ändern.

Ist $k = (1 + i) k'$ und k' ungerade-primär, so muss l ungerade sein, und die durch die Form $kt + l$ darstellbaren primären Zahlen fallen mit den durch die Form $(1 + i)^2 kt + l'$ ausdrückbaren zusammen, wo $l' \equiv l \pmod{k}$ und primär ist.

Ist $k = (1 + i)^2 k'$ und k' ungerade, so kann der Ausdruck $kt + l$ nur dann ungerade primäre Zahlen enthalten, wenn $l \equiv 1$ oder -1 $(\text{mod}\,(1 + i)^3)$ ist; im ersten Falle lässt sich die Form $kt + l$ durch $(1 + i)^3 k' + l$, im zweiten durch $(1 + i)^3 k't + l + 2k'$ ersetzen.

Ist endlich $k = (1 + i)^\rho k'$ und $\rho \geqq 3$, so muss l primär sein, wenn überhaupt der Ausdruck $kt + l$ ungerade primäre complexe Zahlen darzustellen fähig sein soll.

Zur Isolirung der primären complexen Primzahlen von der Form $kt + l$ dienen die Mittel, welche *Dirichlet* in dem Beweise des Satzes, dass die Linearform $kt + l$ unendlich viele complexe Primzahlen auszudrücken fähig ist, gegeben hat*).

Zunächst ist für jede zu k theilerfremde complexe Zahl n ein System von Indices in Bezug auf den Modul k zu definiren.

Enthält k die $f$te Potenz einer zweigliedrigen complexen Primzahl $a + bi$ als Factor, so lege man eine bestimmte primitive Wurzel α für den Modul $(a + bi)^f$ zu Grunde, und der Exponent α_n, welcher der Congruenz $n \equiv \alpha^{\alpha_n} \pmod{(a + bi)^f}$ genügt und $< (a^2 + b^2)^{f-1} (a^2 + b^2 - 1)$ ist, heisse der Index von n für den Modul $(a + bi)^f$. Dasselbe gilt von jeder anderen in k aufgehenden zweigliedrigen Primzahl.

Enthält k die $g$te Potenz einer eingliedrigen complexen Primzahl r

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1841.

als Factor, so hat man zwei Zahlen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu suchen, welche bezüglich zu den Exponenten $(r^2-1)r^{\varrho-1}$ und $r^{\varrho-1}$ nach dem Modul r^ϱ gehören. Der Ausdruck $\mathfrak{b}^\beta \mathfrak{c}^\gamma$ stellt dann, wenn β alle Werthe der Reihe $0, 1, \cdots r^{\varrho-1}(r^2-1)-1$ und γ alle Werthe der Reihe $0, 1, \cdots r^{\varrho-1}-1$ annimmt, sämmtliche zu r theilerfremde Zahlen eines vollständigen Restausschusses für den Modul r^ϱ dar. Die Exponenten β_n, γ_n, welche der Congruenz $\mathfrak{b}^{\beta_n} \mathfrak{c}^{\gamma_n} \equiv n \pmod{r^\varrho}$ genügen und bezüglich kleiner als $(r^2-1)\, r^{\varrho-1}$ und $r^{\varrho-1}$ sind, heissen die Indices von n in Bezug auf den Modul r^ϱ. Dasselbe gilt von jeder anderen in k aufgehenden eingliedrigen Primzahl.

Ist $k = (1+i)^3 k'$ und k' ungerade, so braucht die Zahl $1+i$ als Modul gar nicht berücksichtigt zu werden. Ist hingegen $k = (1+i)^\varrho k'$ und $\varrho > 3$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ϱ ungerade oder gerade ist.

A) Ist ϱ ungerade und $= 2h+1$, wo $h \geqq 2$ vorausgesetzt wird, so stellt der Ausdruck $(-1+2i)^\delta\, 5^\varepsilon$ alle 2^{2h-2} ungeraden primären Zahlen eines vollständigen Restausschusses für den Modul $(1+i)^{2h+1}$ dar, wenn δ und ε unabhängig von einander alle Werthe $0, 1, \cdots 2^{h-1}-1$ durchlaufen. Die Exponenten δ_n, ε_n, welche der Congruenz $(-1+2i)^{\delta_n}\, 5^{\varepsilon_n} \equiv n \pmod{(1+i)^{2h+1}}$ genügen und $< 2^{h-1}$ sind, heissen die Indices der primären Zahl n für den Modul $(1+i)^{2h+1}$.

B) Ist ϱ gerade und $= 2h$, so müssen in dem Complexe der Zahlen, welche aus dem Ausdrucke $(-1+2i)^\delta 5^\varepsilon$ dadurch hervorgehen, dass für δ und ε alle Verbindungen je zweier Zahlen der Reihe $0, 1, \cdots 2^{h-1}-1$ genommen werden, und welche nach dem Modul $(1+i)^{2h+1}$ alle verschieden sind, je zwei und nur zwei nach dem Modul $(1+i)^{2h}$ congruente Zahlen vorkommen. In der That ist, wenn $\varepsilon' \equiv \varepsilon \pmod{2^{h-2}}$ angenommen wird,

$$5^{\varepsilon'} \equiv 5^\varepsilon \ (\text{mod } 2^h \text{ oder } (1+i)^{2h})$$

und daher auch

$$(-1+2i)^\delta 5^{\varepsilon'} \equiv (-1+2i)^\delta 5^\varepsilon \pmod{(1+i)^{2h}}.$$

Es genügt daher ε auf die Reihe $0, 1, \cdots 2^{h-2}-1$ zu beschränken und δ alle Werthe der Reihe $0, 1, \cdots 2^{h-1}-1$ zu ertheilen, um sämmtliche ungerade primäre Zahlen eines vollständigen Restausschusses für den Modul $(1+i)^{2h}$ aus dem Ausdrucke $(-1+2i)^\delta 5^\varepsilon$ abzuleiten. Die der

Congruenz $(-1+2i)^{\delta_n} 5^{\varepsilon_n} \equiv n \pmod{(1+i)^{2h}}$ genügenden Exponenten δ_n, ε_n, welche bezüglich kleiner als 2^{h-1} und 2^{h-2} sind, sollen die Indices der ungeraden primären Zahl n heissen. Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Indices des Productes mn erhalten werden, wenn man die Summen $\delta_m + \delta_n$, $\varepsilon_m + \varepsilon_n$ bezüglich auf ihre kleinsten positiven Reste nach den Moduln 2^{h-1}, 2^{h-2} zurückführt, dass nach dem Modul $(1+i)^{2h}$ congruente Zahlen gleiche Indices besitzen und umgekehrt aus der Annahme $\delta_m = \delta_n$, $\varepsilon_m = \varepsilon_n$ sich $m \equiv n \pmod{(1+i)^{2h}}$ ergiebt.

Fasst man nun alle Indices $\alpha_n \cdots \beta_n, \gamma_n, \cdots \delta_n, \varepsilon_n$ zusammen, so bilden dieselben ein vollständiges System $\mathfrak{S}_n$ von Indices der Zahl n in Bezug auf den Modul k und man hat symbolisch

$$\mathfrak{S}_m + \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{mn}, \quad \mathfrak{S}_{n'} = \mathfrak{S}_n,$$

wenn $n' \equiv n \pmod{k}$; und umgekehrt, wenn $\mathfrak{S}_{n'} = \mathfrak{S}_n$ ist, so muss $n' \equiv n \pmod{k}$ sein.

Es sind nun weiter, den verschiedenen complexen Primfactoren von k entsprechend, die binomischen Gleichungen

$$\xi^{(a^2+b^2)^{f-1}(a^2+b^2-1)} = 1 \quad \cdots$$
$$\eta^{(r^2-1)r^{g-1}} = 1, \quad \zeta^{r^{g-1}} = 1 \quad \cdots$$

und

$$\omega^{2^{h-1}} = 1, \quad \omega'^{2^{h-1}} = 1,$$

wenn $k = (1+i)^{2h+1}k'$, dagegen

$$\omega^{2^{h-1}} = 1, \quad \omega'^{2^{h-2}} = 1,$$

wenn $k = (1+i)^{2h}k'$ und k' ungerade ist, zu bilden. Sollte k eine Art von complexen Primfactoren gar nicht enthalten, so sind die entsprechenden Gleichungen fortzulassen; dasselbe gilt von den beiden letzten, wenn k durch keine höhere als die dritte Potenz von $1+i$ theilbar ist.

Wird das Product

$$\xi^{\alpha_n} \cdots \eta^{\beta_n} \zeta^{\gamma_n} \cdots \omega^{\delta_n} \omega'^{\varepsilon_n}$$

mit c_n bezeichnet und für solche Zahlen n, welche nicht zu k theilerfremd sind, $c_n = 0$ definirt, so hat c_n unter Beibehaltung der nämlichen Wurzeln $\xi \cdots \eta, \zeta \cdots \omega, \omega'$ die folgenden Eigenschaften:

$$(43.) \quad c_m \, c_n = c_{mn}, \quad c_{n'} = c_n,$$

wenn $n' \equiv n \pmod{k}$, und über alle ungeraden primären Zahlen eines vollständigen Restausschusses für den Modul k erstreckt:

$$44.\quad \Sigma c_n = 1 \text{ oder } = \tfrac{1}{4} \varphi k$$

[illegible] Wurzeln $\xi \cdots \eta, \zeta \cdots \omega, \omega'$ von 1 ver- [illegible] = 1 sind. Wird dagegen das Zeichen Σ auf sämmt- [illegible] Wurzeln $\xi \cdots \eta, \zeta \cdots \omega, \omega'$ bei unveränderlichem [illegible]

$$45.\quad \Sigma c_n = \tfrac{1}{4} \varphi k \text{ oder } = 0.$$

[illegible]

[illegible] von c_n folgt sogleich, dass, [illegible] Zahlen, deren Norm [illegible] Wurzeln $\xi \cdots \eta$, [illegible] verschieden vorausgesetzt [illegible] für fx ein Ausdruck von [illegible]

$$fx = C \sqrt{x}$$

[illegible] Modul von C nie eine gewisse angebbare [illegible] In der That ist die Anzahl der ungeraden [illegible] primären Zahl n^0 nach dem [illegible] Normen $\leq x$ sind, durch die Formel [illegible] in welcher der Zahlenwerth von B beständig [illegible] Grenze B^0 bleibt. Wird nun diese Formel mit c_n [illegible] auf alle ungeraden primären Glieder eines voll- [illegible] für den Modul k summirt, so ergiebt sich wegen (44.)

$$fx = \sqrt{x}\, \Sigma c_n B$$

[illegible]

$$\text{und } \Sigma c_n B \leq \Sigma B^0.$$

[illegible] Hülfe dieses Ausdruckes von fx lässt sich leicht darthun, dass [illegible] Summen

$$\sum_1^x \frac{c_n \log Nn}{Nn},\quad \sum_1^x \frac{c_n}{Nn},$$

[illegible] alle ungeraden primären complexen Zahlen mit die [illegible] übersteigender Norm vertritt, mit wachsendem x einem [illegible] zustreben. Hierzu reicht es hin, für beide Summen die [illegible] Werthes x^0 von x nachzuweisen, dass die Aende- [illegible] Summen durch ihre Erweiterung über x^0 hinaus bis

zu jedem gegebenen Werthe x' von x erfahren, in ihren reellen und imaginären Bestandtheilen eine Grenze von vorgeschriebener Kleinheit nicht zu erreichen vermögen. In der That ist, wenn zur Vereinfachung für x^0 und x' ganze Zahlen angenommen werden,

$$\sum_{1+x^0}^{x'} \frac{c_n}{Nn} = \sum_{1+x^0}^{x'} \frac{fs-f(s-1)}{s} = -\frac{fx^0}{1+x^0} + \frac{fx'}{1+x'} + \sum_{1+x^0}^{x'} \frac{fs}{s(s+1)}$$

$$\text{mod} \sum_{1+x^0}^{x'} \frac{c_n}{Nn} < \frac{\mathfrak{H}^0 \sqrt{x^0}}{1+x^0} + \frac{\mathfrak{H}^0 \sqrt{x'}}{1+x'} + 2\mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{s+1}}\right)$$

$$< \frac{3\mathfrak{H}^0}{\sqrt{1+x^0}},$$

$$\sum_{1+x^0}^{x'} \frac{c_n \log Nn}{Nn} = \sum_{1+x^0}^{x'} \frac{fs-f(s-1)}{s} \log s$$

$$= -\frac{fx^0 \log(1+x^0)}{1+x^0} + \frac{fx' \log(1+x')}{1+x'} + \sum_{1+x^0}^{x'} fs\left(\frac{\log s}{s} - \frac{\log(s+1)}{s+1}\right)$$

$$\text{mod} \sum_{1+x^0}^{x'} \frac{c_n \log Nn}{Nn} < \mathfrak{H}^0 \frac{\log(1+x^0)}{\sqrt{1+x^0}} + \mathfrak{H}^0 \frac{\log(1+x')}{\sqrt{1+x'}} + \mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'} \left(\frac{\log s}{s} - \frac{\log(s+1)}{s+1}\right)\sqrt{s}$$

$$< 2\mathfrak{H}^0 \frac{\log(1+x^0)}{\sqrt{1+x^0}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^0 \sum_{1+x^0}^{x'} \frac{\log s}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Reihen

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{Nn}, \quad \sum_1^\infty \frac{c_n \log Nn}{Nn}$$

sind also in dem auseinandergesetzten Sinne convergent und zugleich ist ersichtlich, dass, wenn die Summe der ersten $= L$ gesetzt wird,

$$(46.) \quad \sum_1^x \frac{c_n}{Nn} = L + \frac{3\lambda\mathfrak{H}^0}{\sqrt{x}}$$

ist, wo der analytische Modul von λ die Einheit nicht übersteigt.

Dies vorausgeschickt, denke man sich in jedem Gliede des Ausdruckes

$$\sum_1^x \frac{c_n \log Nn}{Nn}$$

den Logarithmus von Nn in die Logarithmen der Normen der primären complexen Primfactoren von n zerlegt und vereinige hierauf alle diejenigen Bestandtheile, welche mit dem Logarithmus der Norm der nämlichen complexen Primzahl q als Factor behaftet sind, zu einem Gesammtgliede. Dieses Gesammtglied findet man nach leichter Ueberlegung gleich:

$$\frac{c_q \log Nq}{Nq} \sum_1^{\frac{x}{Nq}} \frac{c_n}{Nn} + \frac{c_{q^2} \log Nq}{Nq^2} \sum_1^{\frac{x}{Nq^2}} \frac{c_n}{Nn} + \cdots,$$

und da nach (46.)

$$\sum_1^{\frac{x}{Nq}} \frac{c_n}{Nn} = L + \frac{3\lambda\sqrt{Nq}}{\sqrt{x}} \mathfrak{H}^0$$

gesetzt werden kann, so nimmt dasselbe die Form

$$\frac{L c_q \log Nq}{Nq} + \mathfrak{R}$$

an, wo

$$\operatorname{mod} \mathfrak{R} < \frac{3\mathfrak{H}^0 \log Nq}{\sqrt{x Nq}} + 3\mathfrak{H}^0 \log Nq \left(\frac{1}{Nq^2} + \frac{1}{Nq^3} + \cdots\right).$$

Man hat daher

$$(47.) \quad \sum_1^{x} \frac{c_n \log Nn}{Nn} = L \sum_1^{x} \frac{c_q \log Nq}{Nq} + \mathfrak{R}';$$

die auf der rechten Seite angezeigte Summation betrifft alle ungeraden primären complexen Primzahlen q mit die Grenze x nicht übersteigender Norm und es ist, wenn p zur Bezeichnung aller ungeraden reellen Primzahlen dient, nach (18.)

$$\operatorname{mod} \mathfrak{R}' < \frac{6\mathfrak{H}^0}{\sqrt{x}} \sum_1^{x} \frac{\log p}{\sqrt{p}} + 6\mathfrak{H}^0 \sum_1^{x} \frac{\log p}{p(p-1)}$$
$$< 6\mathfrak{H}^0 \left(4 + \sum_3^{\infty} \frac{\log p}{p(p-1)}\right).$$

Da nach der bereits angezogenen Abhandlung von *Dirichlet* L nicht verschwinden kann, so schliesst man aus (47.), dass der analytische Modul der Summe

$$\sum_1^{x} \frac{c_q \log Nq}{Nq}$$

nie eine gewisse angebbare Constante C überschreiten kann, wie gross auch x sei.

Wird diese Summe zur Abkürzung mit Θx bezeichnet, so ist

$$\frac{\Theta s - \Theta(s-1)}{\log s} = \frac{c_{f+ig} + c_{f-ig}}{f^2+g^2} \text{ oder } = \frac{c_f}{f^2},$$

je nachdem s als Norm einer zweigliedrigen ungeraden primären complexen Primzahl $f+ig$ oder einer eingliedrigen f gedacht werden kann; für jeden anderen von 1 verschiedenen positiven ganzzahligen Werth von s ist

$$\frac{\Theta s - \Theta(s-1)}{\log s} = 0.$$

Es ist demzufolge

$$\sum_{1+x^0}^{x'} \frac{c_q}{Nq} = \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \frac{\Theta s - \Theta(s-1)}{\log s}$$

$$= -\frac{\Theta x^0}{\log(1+x^0)} + \frac{\Theta x'}{\log(1+x')} + \sum_{1+x^0}^{x'}{}_s \Theta s \left(\frac{1}{\log s} - \frac{1}{\log(s+1)}\right)$$

und

$$\operatorname{mod} \sum_{1+x^0}^{x'} \frac{c_q}{Nq} < \frac{C}{\log(1+x^0)} + \frac{C}{\log(1+x')} + \sum_{1+x^0}^{x'} C\left(\frac{1}{\log s} - \frac{1}{\log(s+1)}\right)$$

$$< \frac{2C}{\log(1+x^0)}.$$

Dies zeigt, dass die Reihe $\sum_3^\infty \frac{c_q}{Nq}$ convergirt, wofern ihre Glieder der Grösse der Nenner nach geordnet werden, und dass, wenn der Summenwerth derselben mit $\mathfrak{W}(\xi \cdots)$ bezeichnet wird,

$$(48.)\quad \sum_3^G \frac{c_q}{Nq} = \mathfrak{W}(\xi \cdots) + \frac{2\lambda C}{\log(1+G)}$$

ist. Diese Gleichung gilt für jede Wurzelverbindung $\xi \cdots \eta$, $\zeta \cdots \omega$, ω' mit alleiniger Ausnahme derjenigen, in welcher sämmtliche Wurzeln $= 1$ sind.

Sind alle Wurzeln $\xi \cdots \eta$, $\zeta \cdots \omega$, $\omega' = 1$, so ist $c_q = 1$ für alle primären complexen Primzahlen, welche nicht in k aufgehen, dagegen $= 0$, wenn q in k aufgeht. Bezeichnet daher σ die Summe der reciproken Werthe der Normen der in k aufgehenden ungeraden primären Primzahlen (welche $= 0$ sein wird, wenn k eine Potenz von $1+i$ ist) und allgemein $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezüglich reelle Primzahlen von der Form $4h+1$, $4h+3$, so hat man

$$(49.)\quad \sum_3^G \frac{c_q}{Nq} = \sum_3^G \frac{1}{Nq} - \sigma = 2\sum_3^G \frac{1}{\mathfrak{p}} + \sum_3^{\sqrt{G}} \frac{1}{\mathfrak{q}^2} - \sigma.$$

Es ist aber, wenn $\sum_3^\infty \frac{1}{\mathfrak{q}^2} = Q$ gesetzt wird,

$$\sum_3^{\sqrt{G}} \frac{1}{\mathfrak{q}^2} = Q + \frac{\lambda}{2\sqrt{G}}$$

$$\sum_3^G \frac{1}{\mathfrak{p}} = \tfrac{1}{2} ll\, G + \frac{\mathfrak{C} - H + A - \frac{1}{2}}{2} + \delta^{*}).$$

---

*) *Mertens*, ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, dieses Journal, Band 78.

Werden diese Werthe in (49.) substituirt, so erhält man in dem Falle, wo alle Wurzeln $\xi \cdots \eta$, $\zeta \cdots \omega$, $\omega' = 1$ sind,

$$(50.)\quad \sum_{3}^{G} \frac{c_q}{Nq} = llG + \mathfrak{C} - H + A - \tfrac{1}{2} - \sigma + Q + \varepsilon,$$

wo ε eine Zahl von der Ordnung $\frac{1}{\log G}$ ist.

Die Gleichungen (48.), (50.) gestatten die Summe der reciproken Normen der in dem Ausdrucke $kt + l$ enthaltenen complexen Primzahlen mit die Grenze G nicht übersteigender Norm auszuscheiden. Zu diesem Ende reicht es hin, wenn $m \equiv \frac{1}{l} \pmod{k}$ ist, die Gleichung (48.) mit $\frac{4c_m}{\varphi k}$ zu multipliciren, hierauf über alle Wurzelverbindungen $\xi \cdots \eta$, $\zeta \cdots \omega$, ω' in denen wenigstens eine Wurzel von 1 verschieden ist, zu summiren und zu dem Resultat die mit $\frac{4}{\varphi k}$ multiplicirte Gleichung (50.) hinzuzufügen. Es fallen dann alle Primzahlen heraus mit Ausnahme derjenigen, welche die Bedingung

$$mq \equiv 1 \pmod{k} \text{ d. h. } q \equiv \frac{1}{m} \equiv l \pmod{k}$$

erfüllen oder in dem Ausdrucke $kt + l$ enthalten sind, und man erhält bis auf einen Fehler von der Ordnung $\frac{1}{\log G}$

$$\sum_{3}^{G} \frac{1}{Nq} = \frac{4}{\varphi k}\left(llG + \mathfrak{C} - H + A - \tfrac{1}{2} - \sigma + Q + \Sigma c_m \mathfrak{W}(\xi, \cdots)\right).$$

Krakau, im Januar 1874.

Ueber die Abbildung durch algebraische Functionen.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Frage: Ist es möglich, eine ganze Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie vermittelst einer *algebraischen* Function auf die Fläche eines Kreises eindeutig abzubilden? — Zu dieser Frage, welche an sich der Untersuchung nicht unwerth erscheint, wird man unter anderen auf folgendem Wege hingeleitet. In meiner Arbeit dieses Journ. Bd. 75 S. 177 ff. habe ich nachgewiesen, dass man durch die singulären Punkte einer Function einer complexen Variabeln $f(z)$ stets eine geschlossene sich selbst nicht schneidende Curve C_e (Absonderungsschnitt) in der z-Ebene legen kann, von der Beschaffenheit, dass für jeden der beiden dadurch gebildeten Bestandtheile der Ebene, G_1, G_2, durchweg gültige Reihenentwickelungen sich angeben lassen. Der unendlich grosse Theil G_1 ist nämlich durch eine rationale Function auf die Fläche eines Kreises E abgebildet, durch dessen Hülfe die Reihenentwickelungen gefunden werden. In derselben Arbeit ist der Zusammenhang der beiden Functionszweige beim Uebergange über den Absonderungsschnitt festgestellt. — Gelänge es nun, die endliche Fläche G_2, welche diese geschlossene Absonderungslinie bildet, auf Null zu reduciren so hätte man eine *einzige* in der ganzen Ebene mit Ausnahme einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie gültige Reihenentwickelung. Dieses führt eben auf die oben aufgeworfene Frage.

Das Resultat unserer Untersuchung ist aber, dass unter den algebraischen Functionen die rationalen Functionen *zweiten* Grades allein eine ganze Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf die Fläche eines Kreises eindeutig abzubilden vermögen. — Dieser Satz lässt eine Erweiterung zu, bei welcher an die Stelle des Kreises eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche tritt, deren Begrenzung gewissen Voraussetzungen genügt.

Aus demselben Satze, in Verbindung mit den Resultaten meiner oben citirten Arbeit ergiebt sich demnach, dass auch das Zusammenziehen der Fläche G_2 auf Null im *Allgemeinen*, wenn die Function $f(z)$ mehr als drei singuläre Punkte besitzt, wenigstens vermittelst *algebraischer* Substitutionen nicht ausführbar ist, und nur geleistet werden kann, wenn zwischen den singulären Punkten derartige Relationen erfüllt sind, dass eine Substitution zweiten Grades hinreicht, um die in meiner Arbeit vorgenommene Zerlegung der z-Ebene zu erreichen.

1.

Eine algebraische Function z von w, durch welche die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer einen Flächentheil nicht einschliessenden Linie in derselben auf einen bestimmten Flächentheil F der w-Ebene eindeutig abgebildet wird, hat die Eigenschaft, dass jedem w innerhalb der Fläche F nur ein einziger Werth z entspricht. Es ist daher nothwendiger Weise z eine rationale Function von w. Die oben aufgestellte Aufgabe ist also mit der folgenden übereinstimmend:

Die rationalen Functionen z von w zu finden, vermittelst deren die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf einen Kreis in der w-Ebene eindeutig abgebildet werden kann.

2.

Es sei daher

$$(1.)\quad z = \frac{Z(w)}{N(w)} = F(w)$$

eine rationale Function von w, durch welche die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einsschliessenden Linie Γ auf die Fläche eines Kreises K in der w-Ebene eindeutig abgebildet wird. Wir setzen wie in meiner Arbeit (dieses Journ. Bd. 75 S. 178)

$$(2.)\quad \psi(w_1, w) = \frac{F(w_1) - F(w)}{w_1 - w} = 0,$$

und bezeichnen wie dort (S. 180) die Curvenzweige $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}'' \cdots$, welche die Wurzeln w_1 dieser Gleichung beschreiben, während w die Peripherie von K durchläuft, als die mit dieser Peripherie zusammengehörigen Curvenzweige.

Wir wollen hier in einige Erörterungen eintreten, welche zwar theilweise für das Folgende nicht nöthig, aber für das Verständniss der hier betrachteten Abbildungsart nützlich sind:

a) Aus der Voraussetzung ergiebt sich: Jedem nicht auf Γ befindlichen Punkte z entspricht *ein* und nur *ein* Punkt im Innern von K; und umgekehrt, jedem Punkte w entspricht nur ein Punkt z.

Jedem Punkte z auf Γ entsprechen Punkte auf der Peripherie von K, und umgekehrt jedem Punkte w auf dieser Peripherie ein Punkt z auf Γ.

b) Keine der Wurzeln der Gleichung:

$$(3.) \quad F'(w) = 0,$$

wo $F'(w)$ die Ableitung von $F(w)$ bedeutet, liegt im Innern von K. Denn läge eine solche Wurzel w', welche dem Werthe $z = z'$ zugehöre, im Innern von K, so würden bekanntlich jedem dem Punkte z' hinlänglich benachbarten Punkte z mindestens zwei dem Punkte w' beliebig benachbarte Wurzeln w der Gleichung (1.) entsprechen, was nach a) nicht möglich ist.

c) Keinem der Werthe z auf Γ entspricht ein Punkt w im Innern von K. Denn sei $z = \zeta$ ein beliebiger Punkt auf Γ, so entspricht demselben der Voraussetzung gemäss a) ein Punkt w' auf der Peripherie von K. Entspräche demselben auch ein Punkt w'' im Innern von K, so müsste die Gleichung (2.) für $w = w'$ die Wurzel $w_1 = w''$ haben. Demnach gehörte auch zu jedem Werthe w im Innern von K und in der Nähe von w' eine Wurzel w_1 in der Nähe von w'', d. h. es entspräche nicht auf Γ befindlichen Punkten z mehr als eine Wurzel der Gleichung (1.) innerhalb K, was nach a) nicht möglich ist.

d) Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich unmittelbar, dass kein Theil der Curven $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, $\cdot\,.$ sich im Innern von K befindet. Es liegen daher überhaupt von den Wurzeln w_1 der Gleichung (2.) nur *eine* oder *keine* innerhalb K, je nachdem w *ausserhalb* K und nicht auf einer der Curven $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, $\cdots$, oder *im Innern* von K befindlich ist.

e) Jedem Punkte w der Peripherie von K entspricht nur ein Punkt z auf Γ, da z eine rationale Function von w ist. Dagegen *entspricht jedem von den beiden Endpunkten von Γ verschiedenen Punkte z dieser Linie mehr als ein Punkt w auf der Peripherie von K.*

Da nämlich, wenn w von einem bestimmten Punkte w_0 der Peripherie von K ausgehend auf derselben einen vollständigen Umlauf vollzieht, z vom entsprechenden Punkte z_0 auf Γ ausgehend, die *ganze* Curve Γ beschreibend wieder zu z_0 zurückkehrt, so muss hierbei jeder Punkt z min-

destens zweimal überschritten werden, also jedem nicht in einen der Endpunkte von Γ fallenden Punkte z dieser Linie mehr als ein Punkt w auf der Peripherie von K zugehören.

Die beiden Endpunkte von Γ sind Verzweigungspunkte der algebraischen Function w von z Gl. (1.)

f) Es sei ζ ein beliebiger Punkt der Linie Γ, für den nicht gleiche Wurzeln w der Gleichung (1.) auf der Peripherie von K liegen, und w', w'' zwei von einander verschiedene Punkte auf dieser Peripherie, welche $z=\zeta$ zugehören, so entsprechen stetigen Verrückungen von ζ auf Γ stetige Verrückungen von w' und w'' auf der Peripherie von K.

Durch Differentiation der Gleichung (2.) ergiebt sich, wenn

$$(4.)\quad w = re^{\varphi i},\quad w_1 = r_1 e^{\varphi_1 i}$$

gesetzt wird:

$$(5.)\quad \frac{\partial\psi}{\partial w}\, w\left[\frac{dr}{r}+i\,d\varphi\right]+\frac{\partial\psi}{\partial w_1}\, w_1\left[\frac{dr_1}{r_1}+i\,d\varphi_1\right]=0.$$

Der Voraussetzung nach wird die Gleichung (2.) befriedigt für $w=w'$, $w_1=w''$, und es ist für dieselben zusammengehörigen Punkte gleichzeitig

$$dr=0 \text{ und } dr_1=0.$$

Bezeichnet man demnach den Werth von

$$\frac{\partial\psi}{\partial w}\, w : \frac{\partial\psi_1}{\partial w_1}\, w_1 \text{ für } w=w',\ w_1=w''$$

mit A, so erhält man aus Gleichung (5.) für die Verrückungen der zusammengehörigen Punkte w' und w'' die Relation:

$$(6.)\quad d\varphi_1 = -A\,d\varphi.$$

Diese Gleichung lehrt, dass A *eine reale* Grösse ist. Dieselbe ist auch wegen der über ζ gemachten Voraussetzung weder Null noch unendlich.

Bewegt sich w von w' aus nach einer beliebigen Richtung, so bewegt sich eine Wurzel w_1 der Gleichung (2.) von w'' ausgehend nach dem aus Gleichung (5.) sich ergebenden Gesetze:

$$(7.)\quad \frac{dr_1}{R}+i\,d\varphi_1 = -A\left(\frac{dr}{R}+i\,d\varphi\right),$$

eine Gleichung, welche in die beiden folgenden zerfällt:

$$(8.)\quad dr_1 = -A\,dr,$$

$$(8a.)\quad d\varphi_1 = -A\,d\varphi$$

(vergl. meine Arbeit dies. Journ. Bd. 75 S. 184).

Da nach d) keine der einem Punkte w im Innern von K entsprechenden Wurzeln w_1 der Gleichung (2.) im Innern von K liegt, so muss $dr_1 > 0$ sein, wenn $dr < 0$, demnach ist nach Gleichung (8.) A *positiv*.

Hieraus folgt aber wiederum nach derselben Gleichung $dr_1 < 0$, wenn $dr > 0$, d. h., wenn w von w' ausgehend aus der Fläche K heraustritt, muss w_1 von w'' ausgehend in diese Fläche eintreten.

g) Wir können jetzt beweisen, *dass keinem Punkte* ζ *der Linie* Γ *mehr als zwei Punkte* w *auf der Peripherie von* K *entsprechen.*

Gehörten nämlich zu ζ drei verschiedene Punkte w', w'', w''' auf der Peripherie von K, so müsste nach f) jedem dem w' hinlänglich benachbarten Werthe w ausserhalb K eine Wurzel w_1 der Gleichung (2.) in der Nähe von w'' und eine Wurzel w_1 in der Nähe von w''', *jede innerhalb* K *gelegen*, entsprechen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, demselben Werthe von z in der Nähe von ζ müsste mehr als ein Werth w innerhalb K zugehören, was nach a) und c) nicht möglich ist.

Man kann auch beweisen, dass von den auf Γ befindlichen Verzweigungspunkten der algebraischen Function w von z es die beiden Endpunkte allein sind, für welche Werthe w auf der Peripherie von K zu den gleichen Wurzeln der Gleichung (1.) gehören. Allein für unseren Zweck genügt es zu wissen, dass Verzweigungspunkte überhaupt nur in endlicher Anzahl vorhanden sind.

Wenn w die Peripherie von K beschreibt, so kann demnach gemäss dem eben festgestellten Satze kein noch so kleiner endlicher Theil der Linie Γ mehr als zweimal zurückgelegt werden. Es ergiebt sich also mit Rücksicht auf e) der Satz:

Jedem von den beiden Endpunkten von Γ *verschiedenen Punkte* z *dieser Linie entsprechen zwei und nur zwei Punkte* w *auf der Peripherie von* K. *Diese beiden Punkte fallen für jeden der Endpunkte in einen einzigen zusammen.*

h) Aus dem Vorhergehenden folgt, dass von den Curven $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, $\cdots$ eine mit der Peripherie von K coincidirt, während von den übrigen kein Theil innerhalb K oder auf der Peripherie von K gelegen ist. Dass kein Theil derselben innerhalb K liegen kann, ist durch d) bewiesen. Dass aber auch kein Theil auf die Peripherie von K fallen kann, ergiebt sich daraus,



dass sonst im Widerspruch zu dem Satze in g) Werthen von z auf Γ mehr als zwei Werthe w auf der Peripherie von K entsprechen müssten.

Man kann zeigen, dass die Curven $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, $\cdots$, mit Ausschluss derjenigen, welche mit der Peripherie von K zusammenfällt, diese Peripherie nirgends schneiden. Den Beweis dieses Satzes, welchen wir für unsern Zweck nicht brauchen, wollen wir jedoch hier unterdrücken.

i) Aus dem Satze in g) ergiebt sich Folgendes: Bewegt sich der Punkt w auf der Peripherie von K, so bewegt sich *eine* und nur *eine* Wurzel w_1 der Gleichung (2.) auf derselben Peripherie. *Vollendet w seinen Umlauf, so hat w_1 ebenfalls einen vollständigen Umlauf vollzogen und umgekehrt.* Denn sonst würden mehr als zwei Punkte der Peripherie von K demselben Werthe z entsprechen müssen.

Aus Gleichung (6.) ergiebt sich, dass sich w und w_1 *in entgegengesetzter Richtung* auf der Peripherie von K bewegen. Sie müssen sich deshalb während eines vollständigen Umlaufes zweimal begegnen. Es wird daher während eines Umlaufes die *halbe Differenz der Argumente* von w und w_1 *alle Werthe zwischen Null und* 2π und zwar jeden Werth nur *einmal* annehmen.

3.

Wir können den Mittelpunkt des Kreises K als Anfangspunkt der w betrachten. Ist nämlich m der zum Mittelpunkt gehörige complexe Werth, so würde die Substitution von v für $w - m$ eine rationale Function von v liefern, welche die z-Ebene mit Ausschluss von Γ auf eine um den Anfang der v beschriebene Kreisfläche abbildete.

Es sei

$$(1.) \quad \begin{cases} Z(w) = a_0 + a_1 w + \cdots + a_n w^n \\ N(w) = b_0 + b_1 w + \cdots + b_n w^n. \end{cases}$$

Setzt man

$$(2.) \quad a_i b_k - a_k b_i = a_{ik},$$

so ist

$$(3.) \quad \psi(w_1, w) = \sum_{k,l} a_{lk} (w_1 w)^k \cdot \frac{w_1^{l-k} - w^{l-k}}{w_1 - w}$$

$$l > k, \quad k = 0, 1, \cdots n, \quad l = 0, 1, \cdots n.$$

Setzt man

$$(4.) \quad w = Re^{\varphi i}, \quad w_1 = Re^{\varphi_1 i},$$

so ist

$$(5.)\quad \frac{w_1^\lambda - w^\lambda}{w_1 - w} = [Re^{\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi)i}]^{\lambda-1} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(\varphi_1-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi)}.$$

Bezeichnen wir

$$(6.)\quad \frac{\varphi_1-\varphi}{2} = \psi,\quad \frac{\varphi_1+\varphi}{2} = \psi_1,\quad Re^{\psi_1 i} = v,\quad \frac{\sin\lambda\psi}{\sin\psi} = S_\lambda,$$

so hat man:

$$(7.)\quad \frac{w_1^\lambda - w^\lambda}{w_1 - w} = S_\lambda \cdot v^{\lambda-1}.$$

Es geht demnach die Gleichung (2.) voriger Nummer für die Werthe (4.) über in

$$(\text{A.})\quad \sum_{kl} a_{lk} S_{l-k} \cdot v^{l+k-1} = 0$$

$$l > k,\quad k = 0, 1, \cdots n,\quad l = 0, 1, \cdots n.$$

Nach dem Satze in i) voriger Nummer genügt jedem realen Werthe von ψ eine auf der Peripherie von K befindliche Wurzel v dieser Gleichung.

4.

Ist der Grad n höher als der zweite, so kann nicht die Wurzel v der Gleichung (A.) *unabhängig sein von ψ.*

Da nämlich nach No. 2, i) zu jeder Lage von w und w_1 während ihres Umlaufes auf der Peripherie von K nur ein bestimmter Werth von ψ gehört, so würde aus der Unabhängigkeit des v von ψ sich ergeben, dass v während des ganzen Umlaufes einen und denselben constanten Werth k hätte. Nun ist

$$(1.)\quad w w_1 = R^2 e^{(\varphi+\varphi_1)i} = v^2,$$

demnach wäre für den ganzen Umlauf

$$(2.)\quad w w_1 = k^2.$$

Es wäre danach *längs der ganzen Peripherie von K*

$$(3.)\quad F(w) = F\left(\frac{k^2}{w}\right).$$

Da also $F(w) : F\left(\frac{k^2}{w}\right)$ längs dieser Peripherie den constanten Werth Eins hätte, so behielte dieser Quotient als rationale Function von w nach einem bekannten Satze denselben Werth in der ganzen w-Ebene, es wäre demnach die Gleichung (3.) allgemein gültig.

Da mod $k = R$, so ist für Werthe w ausserhalb K der Modul von

$$w_1 = \frac{k^2}{w}$$

kleiner als R. Sind daher $w_1', w_1'', \cdots w_1^{(n-1)}$ die $n - 1$ zu einem im Innern von K gelegenen Punkte w gehörigen Wurzeln der Gleichung (2.) Nr. 2, welche nach Nr. 2, d) sämmtlich ausserhalb K befindlich sind, so giebt es auch $n - 1$ zu demselben Werthe w gehörige Wurzeln derselben Gleichung $\frac{k^2}{w_1'}, \frac{k^2}{w_1''}, \cdots \frac{k^2}{w_1^{(n-1)}}$, die innerhalb K liegen.

Nach Nr. 2, d) ist dieses nur möglich, wenn $n - 1 = 1$, also $n = 2$ und $\frac{k^2}{w_1'} = w$ ist. Q. e. d.

5.

Es ergiebt sich aus einer bekannten Formel:

$$(1.) \quad \begin{cases} S = 2^{\lambda-1} \cos^{\lambda-1}\psi + A_{\lambda,\lambda-3} \cdot \cos^{\lambda-3}\psi + \cdots \\ \qquad\qquad S_0 = 1, \quad S_1 = 1, \end{cases}$$

wo $A_{\lambda,\lambda-3}, \cdots$ numerische Grössen bedeuten.

Ordnet man daher die Gleichung (A.) nach Potenzen von $\cos\psi$, so erhält man:

$$(B.) \quad H_0 + H_1(2v\cos\psi) + H_2(2v\cos\psi)^2 + \cdots + H_{n-1}(2v\cos\psi)^{n-1} = 0,$$

wo H_i eine ganze rationale Function von v bedeutet der Gestalt:

$$(2.) \quad H_i = a_{i+1,0} + \cdots + a_{n,n-i-1}\, v^{2n-2i-2},$$

worin wir nur die Coefficienten der nullten und der höchsten Potenz von v angegeben haben.

Setzt man in Gleichung (B.) $-\sqrt{-1}$ für $\sqrt{-1}$ und bezeichnet die conjugirten Werthe der Constanten a_{ik} mit a'_{ik}, und erwägt, dass $\frac{R^2}{v}$ der conjugirte Werth des complexen Werthes v auf der Peripherie von K ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$(B'.) \quad H_0' + H_1'(2v\cos\psi) + H_2'(2v\cos\psi)^2 + \cdots + H_{n-1}'(2v\cos\psi)^{n-1} = 0,$$

wo

$$(2^a.) \quad H_i' = a'_{n,n-i-1} R^{2(2n-i-2)} + \cdots + a'_{i+1,0} R^{2i} v^{2n-2i-2},$$

worin wiederum nur der Coefficient der nullten und der höchsten Potenz von v angegeben ist.

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (B.) und (B'.) die Grösse

$2v \cos \psi$, so müssen in dem Resultate der Elimination für $n > 2$ die einzelnen Coefficienten von v verschwinden, da nach voriger Nummer v nicht von ψ unabhängig sein kann.

6.

Wir behandeln zunächst einen besonderen Fall. Es sei nämlich *erstens* $b_0 = 0$, *zweitens* $a_n = 0$, und es wird *drittens* vorausgesetzt, dass von den Wurzeln der Gleichung

$$(1.)\quad a_0 + a_1 w + \cdots + a_{n-1} w^{n-1} = 0$$

keine im Innern von K, also sämmtliche auf der Peripherie von K und ausserhalb K befindlich sind.

In diesem Falle sind b_n und a_0 von Null verschieden, da sonst der Grad der rationalen Function $F(w)$ nicht, wie wir voraussetzen, der $n$te wäre. Es ist ferner b_1 von Null verschieden. Denn sonst wäre $w = 0$ eine Wurzel der Gleichung (3.) Nr. 2, und es enthielte im Widerspruch zu Nr. 2, b) die Fläche K in ihrem Mittelpunkte eine Wurzel dieser Gleichung.

Da in diesem Falle dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $w = 0$ im Innern von K entspricht, so liegen die Wurzeln der Gleichung:

$$(2.)\quad b_1 + b_2 w + \cdots + b_n w^{n-1} = 0$$

ausserhalb K (Nr. 2, c) und d)).

Aus den beiden ersten Voraussetzungen ergiebt sich

$$(3.)\quad a_{nk} = -a_k b_n, \quad a_{k0} = -a_0 b_k.$$

Setzen wir den Coefficienten von v^0 in dem für diesen Fall gebildeten Resultate der Elimination von $2v \cos \psi$ aus den beiden Gleichungen (B.) und (B'.) gleich Null, und dividiren die entstehende Gleichung durch $a_0^n b_n'^n R^{2n(n-1)}$, wo b_n' der conjugirte Werth von b_n ist, so erhalten wir, wenn wir noch für die nach *Euler* und *Bézout* gebildete Eliminationsresultante zweier Gleichungen:

$$p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n = 0, \quad q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n = 0$$

in der Determinantenform die Bezeichnung einführen

$$\begin{bmatrix} p_0, & p_1, & \cdots & p_n \\ q_0, & q_1, & \cdots & q_n \end{bmatrix},$$

$$(4.)\quad \Delta = \begin{bmatrix} b_1, & b_2, & b_3, & \cdots & b_n \\ a'_{n-1} R^{2(n-1)}, & a'_{n-2} R^{2(n-2)}, & a'_{n-3} R^{2(n-3)}, & \cdots & a'_0 \end{bmatrix} = 0,$$

wo a'_i den conjugirten Werth von a_i darstellt.

Die Resultante der Elimination von w zwischen der Gleichung (2. und der folgenden:

$$(5.)\quad a'_{n-1}r^{2(n-1)} + a'_{n-2}r^{2(n-2)}w + a'_{n-3}r^{2(n-3)}w^2 + \cdots + a'_0 w^{n-1} = 0$$

wird aus Δ erhalten, wenn in letzterer Determinante r für R gesetzt wird, sie ist also, wenn man das Resultat dieser Substitution mit D bezeichnet:

$$(6.)\quad D = 0.$$

Dieser Gleichung genügt nach Gleichung (4.) $r = R$. Demnach hätten die Gleichungen (2.) und (5.) für $r = R$ jedenfalls eine Wurzel w gemeinschaftlich. Bezeichnen wir den Modul derselben mit s und setzen in Gleichung (5.) $r = R$ und für w den ihr mit Gleichung (2.) gemeinsamen Wurzelwerth, dessen conjugirter Werth $\frac{s^2}{w}$ ist, und endlich $-\sqrt{-1}$ für $\sqrt{-1}$, so erhalten wir:

$$(7.)\quad a_0 + a_1\left(\frac{R}{s}\right)^2 w + a_2\left(\frac{R}{s}\right)^4 w^2 + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{R}{s}\right)^{2(n-1)} w^{n-1} = 0.$$

Da die Wurzeln der Gleichung (2.) ausserhalb K liegen, so ist:

$$(8.)\quad s > R,$$

demnach

$$(9.)\quad \operatorname{mod}\left(\frac{R}{s}\right)^2 w = \frac{R^2}{s} < R,$$

deshalb sagt die Gleichung (7.) aus, dass die Gleichung (1.) eine Wurzel $w_0 = \left(\frac{R}{s}\right)^2 w$ hätte, die innerhalb K gelegen ist. Dieses ist aber wegen der dritten Voraussetzung nicht möglich.

Demnach ist *unter den Voraussetzungen dieser Nummer die Abbildung der ganzen z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ durch die rationale Function $z = F(w)$ nicht möglich, wenn $n > 2$.*

7.

Es sei nunmehr allgemein

$$(1.)\quad z = \frac{Z(w)}{N(w)} = F(w)$$

eine reducirte rationale Function vom $n$ten Grade, d. h. eine solche, in welcher der Zähler oder der Nenner oder beide zugleich vom $n$ten Grade sind. Es werde vorausgesetzt, dass durch dieselbe die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie Γ auf die um den

Anfang der w als Mittelpunkt mit dem Radius R beschriebenen Kreisfläche K eindeutig abgebildet werde.

Es sei α ein Punkt auf der Peripherie von K, für den z weder Null noch unendlich, und

$$(2.)\quad \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} = -\frac{p}{q}$$

gesetzt. Sind a_n und b_n die Coefficienten der höchsten Potenzen von w resp. im Zähler und Nenner von (1.), so kann nicht für jedes α auf der Peripherie

$$(3.)\quad \frac{p}{q} = -\frac{a_n}{b_n}$$

sein, weil sonst die rationale Function $F(w)$ auf dieser Peripherie, also nach einem bekannten Satze überall constant wäre. Es werde nun vorausgesetzt, *dass α ein Punkt sei, für den die Gleichung* (3.) *nicht erfüllt ist.*

Alsdann ist

$$(4.)\quad pN(w) + qZ(w) = Z_1(w)$$

eine ganze rationale Function vom $n$ten Grade, welche für $w = \alpha$ verschwindet.

Die Ebene $\mathfrak{z}$, welche mit der z-Ebene durch die Beziehung:

$$(5.)\quad \mathfrak{z} = \frac{p+qz}{r+sz},$$

in welcher r und s noch zu bestimmende Grössen sind, verbunden ist, wird mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie $\mathfrak{G}$ auf die Kreisfläche K abgebildet durch die Substitution:

$$(6.)\quad \mathfrak{z} = \frac{Z_1(w)}{N_1(w)},$$

wo

$$(7.)\quad N_1(w) = rN(w) + sZ(w).$$

Der Zähler $Z_1(w)$, welcher für den Punkt α der Peripherie von K verschwindet, kann nur noch in *einem* anderen Punkte der Peripherie Null werden (Nr. 2, g)). Ist daher $n > 2$, so giebt es noch ausserhalb K (Nr. 2, c)) im Endlichen befindliche Punkte, für welche $Z_1(w)$ verschwindet. Ein solcher sei γ. Nun bestimme man r und s so, dass

$$(8.)\quad N_1\left(\frac{R^2}{\gamma}\right) = 0$$

sei, wo γ' den conjugirten Werth von γ darstellt. Durch die Substitution:

$$(9.)\quad w = \frac{\varrho\beta + \sigma\gamma\mathfrak{w}}{\varrho + \sigma\mathfrak{w}},$$

wo

$$(10.)\quad \beta = \frac{R^2}{\gamma'}$$

und ϱ und σ unbestimmte von Null verschiedene Grössen sind, wird die Kreisfläche K auf die Fläche des um den Anfang der $\mathfrak{w}$ als Mittelpunkt in der $\mathfrak{w}$-Ebene beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ abgebildet.

Es sei

$$(11.)\quad \begin{cases} Z_1(w) = (w-\gamma)\prod_1^{n-1}{}_i(\alpha_i w - A_i), \\ N_1(w) = (w-\beta)\prod_1^{n-1}{}_i(\beta_i w - B_i), \end{cases}$$

so wird durch die Substitution (9.)

$$(12.)\quad \mathfrak{z} = -\frac{\varrho}{\sigma}\cdot\frac{\prod_1^{n-1}{}_i[\varrho(\alpha_i\beta - A_i) + \sigma(\gamma\alpha_i - A_i)\mathfrak{w}]}{\mathfrak{w}\prod_1^{n-1}{}_i[\varrho(\beta_i\beta - B_i) + \sigma(\beta_i\gamma - B_i)\mathfrak{w}]}$$

eine rationale Function von $\mathfrak{w}$, welche den drei Voraussetzungen der vorigen Nummer genügt. Es ist *erstlich* der Coefficient von $\mathfrak{w}^0$ des Nenners Null, *zweitens* der Coefficient von $\mathfrak{w}^{n-1}$ des Zählers Null, *drittens* entspricht dem Punkte $\mathfrak{z} = 0$ der auf der Peripherie von $\mathfrak{K}$ liegende Werth

$$\mathfrak{w} = \frac{\varrho}{\sigma}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma},$$

also kein Punkt innerhalb K (Nr. 2, c)).

Da also aus der Abbildung der z-Ebene auf die Fläche K die der $\mathfrak{z}$-Ebene auf die Fläche $\mathfrak{K}$ (Gl. (12.)) folgt, die letztere aber nach voriger Nummer nicht möglich ist, so ergiebt sich der allgemeine Satz:

Es ist nicht möglich, durch eine rationale Function z von w höheren als zweiten Grades die ganze z-Ebene mit Ausschluss einer eine Fläche nicht einschliessenden Linie auf eine Kreisfläche in der w-Ebene eindeutig abzubilden.

8.

Für $n = 2$ wird die Gleichung (2.) Nr. 2 nach Gleichung (3.) Nr. 3:

$$(1).\quad a_{10} + a_{20}(w_1 + w) + a_{21}w_1 w = 0.$$

Eine Abbildung der z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ auf die in

der w-Ebene um den Anfang der w als Mittelpunkt mit dem Radius R beschriebene Kreisfläche K wird stattfinden, wenn durch die Gleichung (1.) das Innere des Kreises K auf das Aeussere desselben abgebildet wird.

Es beschreibe w die Peripherie von K, so beschreibt w_1 dieselbe Peripherie, wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$(2.)\quad R^2 a'_{20} a_{21} - a'_{10} a_{20} = 0.$$

Dem Punkte $w = 0$ des Innern von K entspricht der Punkt

$$w_1 = -\frac{a_{10}}{a_{20}},$$

Demnach werden die Punkte w_1 des Aeusseren von K den Punkten w im Innern von K entsprechen, wenn

$$\text{mod}\,\frac{a_{10}}{a_{20}} > R,$$

oder

$$(3.)\quad \frac{a_{10}\,a'_{10}}{a_{20}\,a'_{20}} > R^2.$$

9.

Ein zweiter Beweis unseres Satzes am Schlusse der Nr. 7 könnte auf folgendem Wege geliefert werden.

Bringt man die Gleichung

$$(1.)\quad z = F(w)$$

auf die Form

$$(2.)\quad (a_0 - b_0 z) + (a_1 - b_1 z)w + (a_2 - b_2 z)w^2 + \cdots + (a_n - b_n z)w^n = 0,$$

setzt in derselben:

$$(3.)\quad w = R \cdot \frac{iu - 1}{iu + 1},$$

und bezeichnet die dadurch entstehende Gleichung mit

$$(4.)\quad P(u) = 0,$$

so ist nach einem Satze, welchen ich in meiner Arbeit d. J. Bd. 75 S. 188 aus der Abhandlung des Herrn *Hermite* (extrait d'une lettre à *M. Borchardt* d. J. Bd. 52 p. 45) hergeleitet, die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung in denen der Coefficient von i negativ ist gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung (2.), die innerhalb des mit dem Radius R um den Anfang der w beschriebenen Kreises K liegen.

Es müsste demnach, wenn die ganze z-Ebene mit Ausschluss der Linie Γ auf die Kreisfläche K durch die Substitution (1.) abzubilden wäre, für jeden nicht Γ angehörigen Werth von z die Gleichung (4.) *eine* und *nur eine* Wurzel haben, in welcher der Coefficient von i negativ ist. Die Entscheidung über die Anzahl der Wurzeln mit negativem Coefficienten von i der Gleichung (4.) ist aber, wie Herr *Hermite* (l. c.) lehrt, gleich der Anzahl der negativen Quadrate, welche auftreten, wenn eine gewisse quadratische Form $\mathfrak{F}$ in eine Summe von Quadraten transformirt wird.

Ist $z = x + yi$, so sind die Coefficienten der Form $\mathfrak{F}$ Formen höherer Ordnung der Variabeln x und y. Ebenso die Coefficienten der Quadrate in der transformirten Form. Man hätte nun nachzuweisen, dass für $n > 2$ *diese letzteren Formen nicht so beschaffen sein können, dass für jeden Werth von* x *und* y *stets eine und nur eine derselben negativ sei.*

Wird umgekehrt unser Satz als bewiesen vorausgesetzt, so ergäben sich aus der eben angedeuteten Untersuchung interessante Eigenschaften jener quadratischen Formen.

Einen dritten Beweis unseres Satzes, welcher durch Zuhülfenahme der die algebraische Function w von z der Gleichung (1.) darstellenden *Riemann*schen Fläche, deren Construction unter Berücksichtigung der Sätze in Nr. 2 leicht auszuführen ist, geliefert werden kann, behalten wir uns für eine andere Gelegenheit vor.

Greifswald, im Februar 1874.

Fig. 2.
zu S. 208, 221

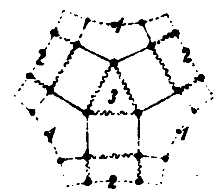


Fig. 4.
zu S. 208, 220.

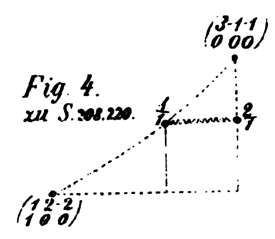
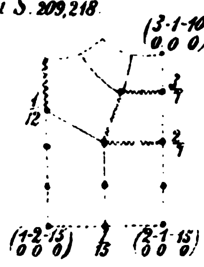
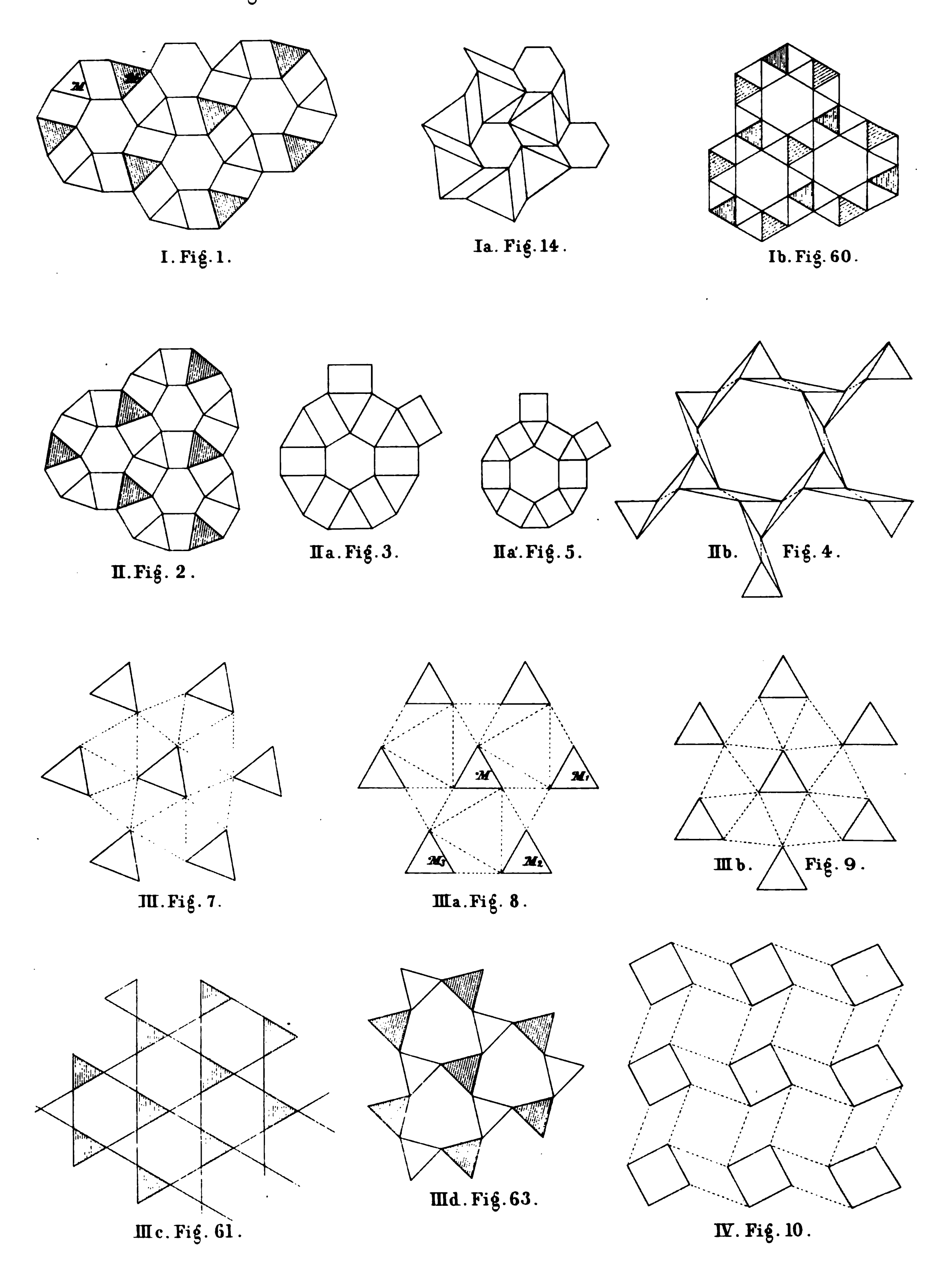


Fig. 5.
zu S. 209, 218





I. Fig. 1.

Ia. Fig. 14.

Ib. Fig. 60.

II. Fig. 2.

IIa. Fig. 3.

IIa'. Fig. 5.

IIb. Fig. 4.

III. Fig. 7.

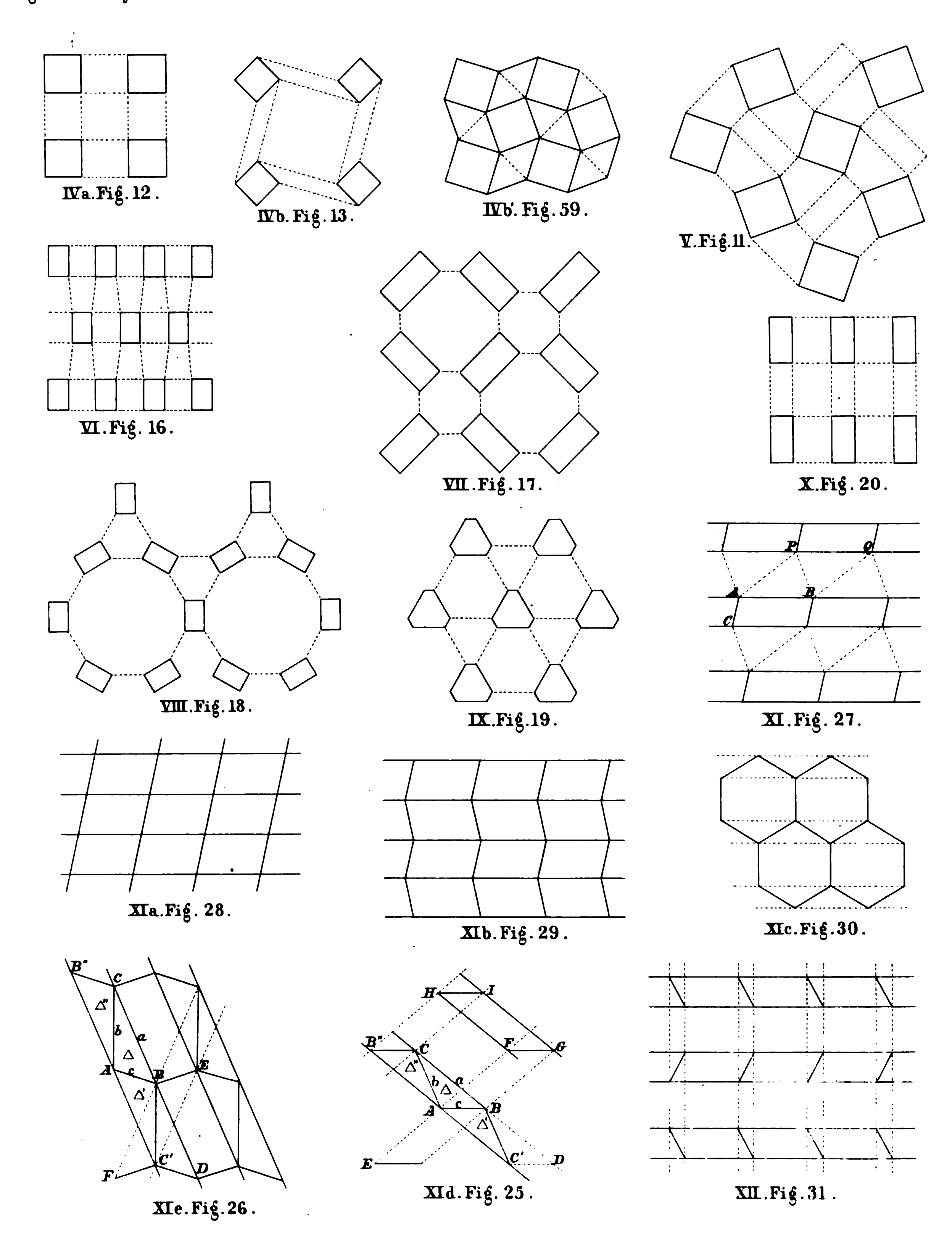
IIIa. Fig. 8.

IIIb. Fig. 9.

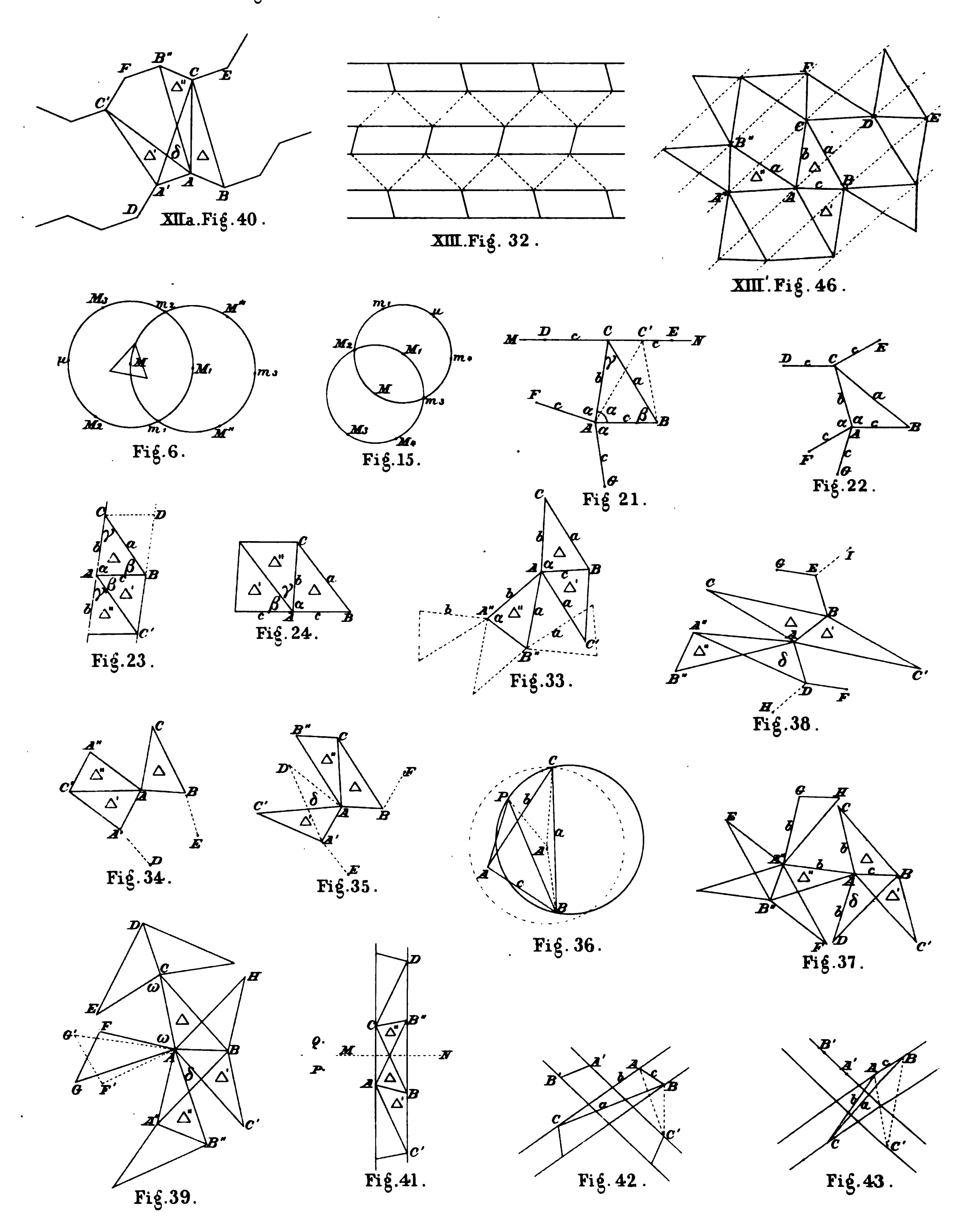
IIIc. Fig. 61.

IIId. Fig. 63.

IV. Fig. 10.



Lith. Anst. v. Leopold Kraatz in Berlin.



XIIa. Fig. 40.

XIII. Fig. 32.

XIII'. Fig. 46.

Fig. 6.

Fig. 15.

Fig 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 33.

Fig. 38.

Fig. 34.

Fig. 35.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 39.

Fig. 41.

Fig. 42.

Fig. 43.

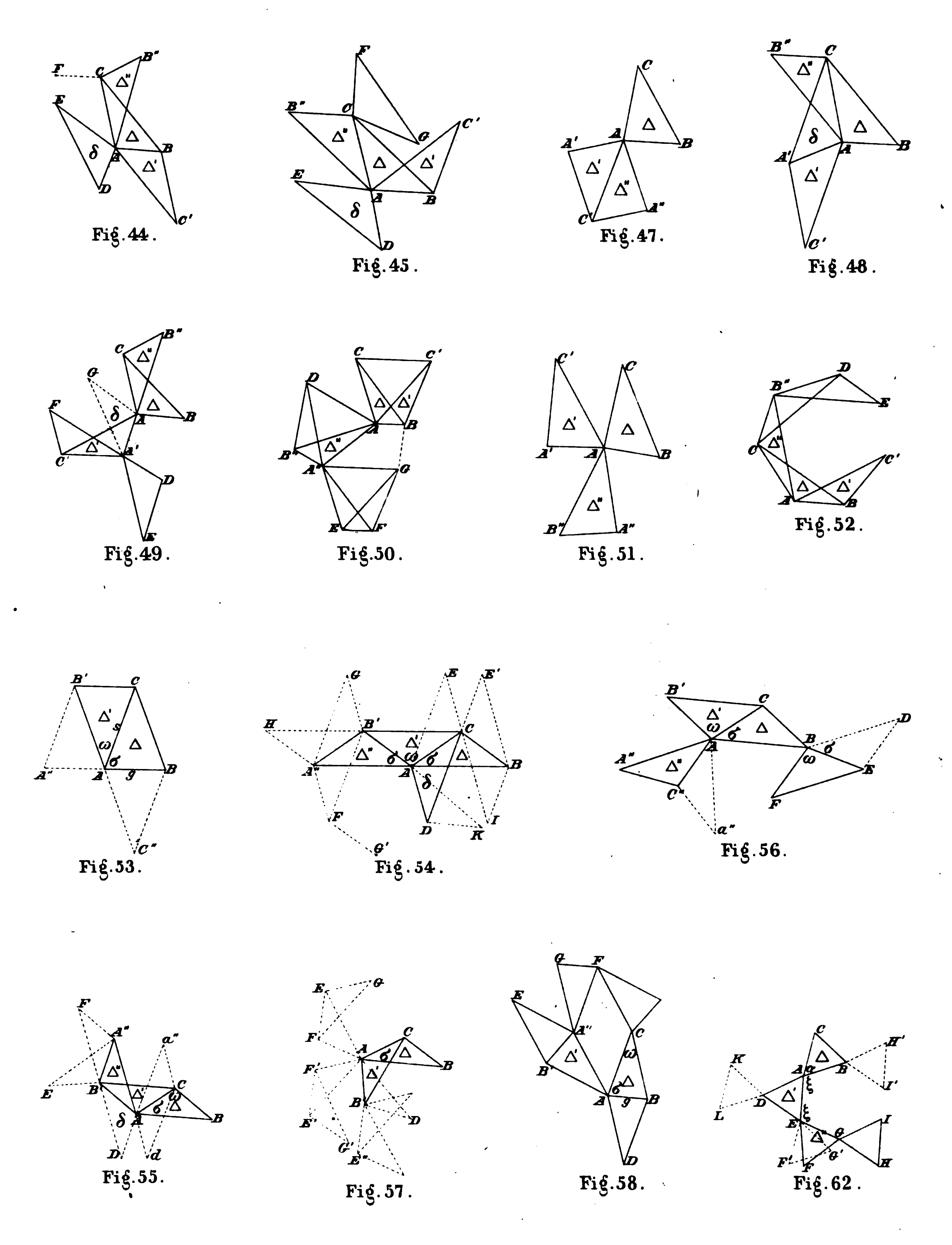


Fig. 44. Fig. 45. Fig. 47. Fig. 48.

Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51. Fig. 52.

Fig. 53. Fig. 54. Fig. 56.

Fig. 55. Fig. 57. Fig. 58. Fig. 62.

Lith. Anst. v. Leopold Kraatz in Berlin.

